Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема	Визначники 1 і 2 порядків. Обчислення визначників 4 порядку.
Мета	вдосконалити навички обчислення визначників 2-го і 3- го порядку,
	закріпити вміння знаходити мінори і алгебраїчні доповнення, визначники 4-го порядку

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе**:** *вступне зауваження*, *мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	50хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 12…20 [5], с. 232…234 [1], с. 6	15хв	Включає в себе: *узагальнення*, *теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1.Сформулюйте правило обчислення визначника 2-го порядку

2.Сформулюйте правило обчислення визначника 3-го порядку

3.Що таке мінор?

4.Що таке алгебраїчне доповнення?

5.Запишіть формулу для обчислення алгебраїчного доповнення

6.Як обчислити визначник n-го порядку.

7.Які властивості визначників ви знаєте?

Приклади

Обчислити визначники:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1) - 2\cdot 5 = -2 - 10 = -12$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - (-1)\cdot 5 = 6 + 5 = 11$

3. $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 - 3\cdot 5 = 0 - 15 = -15$

4. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 70 + (-1)\cdot 1\cdot(-2) + 4\cdot 3\cdot 0 - 0\cdot 5\cdot(-2) - 4\cdot(-1)\cdot 7 - 3\cdot 1\cdot 2 = 94$

5. Заданий визначник

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

Обчислити мінор M_{32}.

Розв’язок

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 36 + 30 - 12 - 6 = 48$$

6. Обчислити визначник матриці A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Розв'язок

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

= -5 + 18 + 6 = 19.

7. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Розв'язок

$$\Delta = 0 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 2 \cdot A_{24} = 3(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(3 + 14 + 48 - 126 - 2 - 8) + 2(4 + 24 + 36 - 48 - 9 - 4) = -207$$

8. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6 - 4) - 1(9 - 1) + 2(12 - 2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0-2) - 1(0-6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значение определителя: -10 + 6 – 40 = -44.

Розв’язування прикладів

1. Обчисліть визначники:

1. $\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 11 & -22 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 7 \\ 4 & -5 & -10 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -16 \\ -4 & -2 & 13 \\ 8 & -4 & -23 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -6 & 3 & 22 \\ 4 & -11 & -3 \end{vmatrix}$.

2. Знайти мінори і алгебраїчні доповнення M_{11}, M_{12}, M_{11}, M_{21}, M_{31}, M_{32} і A_{11}, A_{12}, A_{11}, A_{21}, A_{31}, A_{32} для 5 і 6 прикладів.

3. Обчисліть визначники:

1. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & -1 & -1 \\ 11 & -8 & 34 & 16 \\ 10 & -8 & 8 & -1 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 27 & 20 \\ 2 & -11 & 10 & -3 \end{vmatrix}$.

Питання для підготовки до практичного заняття:

1. Обчислення визначників 2-го і 3-го порядку
2. Знаходження мінорів і алгебраїчних доповнень
3. Обчислення визначника n-го порядку

Домашнє завдання:

[3], с. 12…20
[5], с. 232…234
[1], с.6

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема Правило знаходження оберненої матриці.

Мета вдосконалити навички знаходження оберненої матриці, закріпити вміння обчислювати визначники, повторити множення матриць.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе**:** *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	50хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [5], с. 246…247 [1], с.16	15хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу*

Література

5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с

Навчальні матеріали

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1. За яким правилом обчислюються дві матриці?

2.Коли існує обернена матриця?

3.Дайте означення оберненої матриці

4.За якими правилами обчислюються визначники?

5.Як перевірити що ви правильно знайшли обернену матрицю?

Приклад 1. Знайти обернену матрицю до матриці А

$$A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 3 & 7 & -11\\ 1 & -1 & 8\end{pmatrix}$$

Розв'язання.

Матриця А- квадратна, її визначник за правилом Саріуса

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & -4 & 2\\ 3 & 7 & -11\\ 1 & -1 & 8\end{vmatrix}=5\cdot 7\cdot 8+4\cdot 11\cdot 1-3\cdot 1\cdot 2-2\cdot 7\cdot 1+3\cdot 4\cdot 8-1\cdot 11\cdot 5=$$

$$=280+44-6-14+96-55=420-75=345$$

Отже, матриця A^{-1} існує.

Спочатку знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці А.

$$A_{11}=(-1)^2\cdot M_{11}=\begin{vmatrix}7 & -11\\ -1 & 8\end{vmatrix}=45;\quad A_{21}=30;\quad A_{31}=30$$

$$A_{12}=(-1)^3\cdot M_{12}=\begin{vmatrix}3 & -11\\ 1 & 8\end{vmatrix}=-35;\quad A_{22}=38;\quad A_{31}=61$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot M_{13}=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-10;\quad A_{23}=1;\quad A_{33}=47$$

Одержали обернену матрицю вигляду:

$$A^{-1}=\frac{1}{345}\begin{pmatrix}45 & -30 & 30\\ -35 & 38 & 61\\ -10 & 1 & 47\end{pmatrix}$$

Приклад 2. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A=\begin{pmatrix}8 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

Розв'язання. Задана квадратна матриця другого порядку, її визначник

$$|A|=\begin{vmatrix}8 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=24-8=16\neq 0,$$

тому для знаходження оберненої матриці можна застосувати відому формулу і одержати

$$A^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 8\end{pmatrix}$$

Матричні рівняння.

Нехай потрібно знайти матрицю X, що задовольняє матричне рівняння XA=B, де A – не вироджена матриця.

Помноживши справа обидві частини рівняння на обернену матрицю A^{-1}, дістанемо:

$(XA)A^{-1}=BA^{-1}$, $X(AA^{-1})=BA^{-1}$, $XE=BA^{-1}$, або **$X=BA^{-1}$**

Розв'язок матричного рівняння AX=B знаходять за формулою **$X=A^{-1}B$**.

3. Розв'яжіть матричне рівняння $X\cdot A\cdot B=C$, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -7\end{pmatrix}$

$C=(1 \quad -2)$.

Розв'язання. Послідовно дістаємо $X\cdot A\cdot B=C$, $X\cdot A\cdot B\cdot B^{-1}=C\cdot B^{-1}$, $X\cdot A\cdot E=C\cdot B^{-1}$, $X\cdot A=C\cdot B^{-1}$, $X\cdot A\cdot A^{-1}=C\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$, $X\cdot E=C\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$, $X=C\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$.

Знаходимо обернені матриці A^{-1} та B^{-1}:

$|A|=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-4\neq 0$, $A_{11}=1$, $A_{21}=-2$, $A_{12}=-3$, $A_{22}=2$.

$A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}$;

$|B|=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 2 & -7\end{vmatrix}=-1\neq 0$, $B_{11}=-7$, $B_{21}=-4$, $B_{12}=-2$, $B_{22}=-1$.

$B^{-1}=-\begin{pmatrix}-7 & -4\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

Тоді $X=C\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}=(1 \quad -2)\begin{pmatrix}7 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}=$

$=-\frac{1}{4}(1\cdot 7-2\cdot 2 \quad 1\cdot 4-2\cdot 1)\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}(3 \quad 2)\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}=$

$=-\frac{1}{4}(3\cdot 1+2\cdot(-3) \quad 3\cdot(-2)+2\cdot 2)=-\frac{1}{4}(-3 \quad -2)=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Приклади завдань

1. Знайдіть обернені до матриць:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}a & в\\ c & д\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -3 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$; 7) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

8) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$; 9) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$; 10) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$

2. Знайдіть матрицю $A^{-1} - 3B$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Знайдіть матрицю $5A + A^{-1}$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Питання для підготовки до практичного заняття:

1. Знаходження оберненої матриці
2. Обчислення визначників
3. Множення матриць

Домашнє завдання:

[5], с. 246…247

[1], с. 16

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема	Розв'язування системи лінійних рівнянь методом Крамера
Мета	вдосконалити вміння розв'язувати системи лінійних рівнянь методом Крамера, закріпити вміння знаходити визначники.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [5], с. 250…252 [2], с. 12	10хв	Включає в себе: *узагальнення*, *теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.

2. Фартушний, І.Д. Математика для економістів. Конспект лекцій:[Текст] / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: І.Д.Фартушний.- К.:КПІ ім.Ігоря Сікорського,2019.-109с

Навчальні матеріали

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1.Яке рівняння називається лінійним?

2.Що таке розв'язок системи лінійних рівнянь?

3.Яка система називається сумісною?

4.Які методи розв’язання систем ви знаєте?

5.Сформулюйте формули Крамера.

Приклади:

1. Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$

Розв’язування прикладів

1. Користуючись методом Крамера, розв’язати систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 20 \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -12 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10 \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 14 \end{cases}$

Питання для підготовки до практичного заняття:

1. Розв’язок систем лінійних рівнянь методом Крамера

Домашнє завдання:

[5], с. 250…252

[2], с. 12

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема Матричний метод розв'язання системи лінійних рівнянь.

Мета вдосконалити вміння розв'язувати системи лінійних рівнянь матричним методом, закріпити вміння знаходити визначники і обернені матриці.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе**:** *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	50хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1], с. 254…256 [3], с. 43 [6], с. 42	15хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу*

Література

1. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

Навчальні матеріали

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1.Яке рівняння називається лінійним?

2.Що таке розв'язок системи лінійних рівнянь?

3.Яка система називається сумісною?

4.Які методи розв'язання систем ви знаєте?

5.Сформулюйте формули Крамера.

6.Сформулюйте матричний метод?

7.Коли не можна користуватися матричним методом і чому?

Приклади:

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Знайдемо обернену матрицю A^{-1}.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4\text{-}9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \qquad M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \qquad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10; \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19; \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Зробимо перевірку:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\1&2&3\\4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{30}&\frac{1}{30}&\frac{1}{30}\\-\frac{10}{30}&-\frac{14}{30}&\frac{16}{30}\\\frac{5}{30}&\frac{19}{30}&-\frac{11}{30}\end{pmatrix}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}25+10-5&5+14-19&5-16+11\\5-20+15&1-28+57&1+32-33\\20-30+10&4-42+38&4+48-22\end{pmatrix}=E.$$

Знаходимо матрицю X.

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{30}&\frac{1}{30}\\-\frac{1}{3}&-\frac{7}{15}&\frac{8}{15}\\\frac{1}{6}&\frac{19}{30}&-\frac{11}{30}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\14\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}0+\frac{14}{30}+\frac{16}{30}\\-\frac{1}{3}0-\frac{98}{15}+\frac{128}{15}\\\frac{1}{6}0+\frac{266}{30}-\frac{176}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Відповідь: x =1; y = 2; z = 3.

Розв’язування прикладів

1. Записати і розв’язати в матричній формі систему рівнянь

1) $\begin{cases}x_1-3x_2+x_3=1\\2x_1+x_2-3x_3=-8\\3x_1+2x_2+x_3=-1\end{cases}$

2) $\begin{cases}2x_1+2x_2+x_3=3\\3x_1+4x_2+3x_3=10\\9x_1+8x_2+5x_3=14\end{cases}$

Питання для підготовки до практичного заняття:

1.Основні поняття про систему лінійних рівнянь

2.Матричний метод.

Домашнє завдання:

[5], с. 254…256

[3], с. 43

[6], с. 42

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема Розв'язування системи лінійних рівнянь методом Гауса

Мета повторити методи розв'язку систем лінійних рівнянь вивчених раніше,
вдосконалити знання та навички розв'язку систем методом Гауса,
розв'язати систему трьома методами та вибрати метод найбільш доцільний.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе**:** *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	50хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [5], с. 252…254 [6], с. 85	15хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.

6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

Навчальні матеріали

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1.Назвіть основні методи розв'язку систем лінійних рівнянь

2.Сформулюйте кожен з них?

3.Сформулюйте умови за яких можна використовувати конкретний метод.

4.Який метод є найбільш широким?

Поточний контроль за попередньою темою

Розв'язування прикладів

Приклад. Розв'язати систему методом Гауса

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 20 \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -12 \end{cases}$$

Поділимо кожен член першого рівняння на a_{11}, тобто на 2, так як $a_{11} \neq 0$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 20 \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -12 \end{cases}$$

Віднімемо від другого рядка перший, помножений на -3, а від третього рядка перший, помножений на -5

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -3 \\ 0 + \left(4 + \frac{9}{2}\right)x_2 + \left(-2 - \frac{3}{2}\right)x_3 = 20 + 9 \\ 0 + \left(-6 + \frac{15}{2}\right)x_2 + \left(4 - \frac{5}{2}\right)x_3 = -12 + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -3 \\ 0 + \frac{17}{2}x_2 - \frac{7}{2}x_3 = 29 \\ 0 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 6 \end{cases}$$

Помножимо друге та третє рівняння на 2

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -3 \\ 0 + 17x_2 - 7x_3 = 29 \\ 0 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

Поділимо останнє рівняння системи на 3 і поміняємо місцями друге та третє рівняння. Розв'язок системи при цьому не зміниться, але коефіцієнт при x_2 в другому рівнянні буде дорівнювати одиниці

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -3 \\ 0 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0 + 17x_2 - 7x_3 = 29 \end{cases}$$

Помножимо друге рівняння на -17 і додамо до третього:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -3 \\ 0 + x_2 + x_3 = 2 \\ 0 + 0 - 24x_3 = 24 \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо

$x_3 = -1$

З другого рівняння

$x_2 = 2 - x_3 = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$

З першого рівняння

$$x_1 = -3 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -3 + \frac{3}{2}3 - \frac{1}{2}(-1) = -3 + \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = -3 + \frac{10}{2} = -3 + 5 = 2$$

Відповідь: $x_1 = 2\ x_2 = 3\ x_3 = -1$

Розв’язати систему рівнянь:

1) за формулами Крамера;

2) матричним методом.

3) методом Гауса

1. $\begin{cases} 2x + y + z = 1; \\ x - 2y + z = 0; \\ x - y + 2z = -1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - y + z = 6; \\ 2x + y + z = 3; \\ x + y + 2z = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + 2yz = -1; \\ 4x + 3y + z = 2; \\ x - y + 5z = 17. \end{cases}$

Питання для підготовки до практичного заняття:

1.Метод Крамера

2.Матричний метод.

3.Метод Гауса.

Домашнє завдання:

[5], с. 252…254

[6], с.85

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема Скалярний добуток векторів.

Мета вдосконалити знання і навички розв'язання задач з векторами, вміння знаходити скалярний добуток векторів.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе**:** *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	50хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 75…84 [6], с. 124	15хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

Навчальні матеріали

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1.Що таке вектор

2.Які вектори називаються колінеарними

3.Які вектори – рівні?

4.Як знайти довжину вектора

5.Що таке скалярний добуток двох векторів

6.Як обчислити проекцію вектора на вектор?

7.Сформулюйте формулу для обчислення кута між векторами

Розв'язування прикладів

1. Дано вершини трикутника $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(3;\ 2;\ -1)$ і $C(5;\ -3;\ 4)$. Знайти:

1) довжину сторін AC і AB;
2) площу трикутника;
3) кут A;
4) проекцію вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$.

2. Дано вершини трикутника $A(5;\ 4;\ -1)$, $B(-3;\ 6;\ 3)$ і $C(-2;\ -1;\ 3)$. Знайти:

1) довжину сторін AC і AB;
2) площу трикутника;
3) кут A;
4) проекцію вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$.

Приклади розв'язання типових задач.

1. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{в}$ утворюють кут $\varphi = 120^0$. Знаючи, що $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{в}| = 4$, обчисліть: а) $(3\overline{a} - 2\overline{в})(\overline{a} + 2\overline{в})$; б)$|\overline{a} - \overline{в}|$.

Розв'язання.

а) $A = (3\overline{a} - 2\overline{в})(\overline{a} + 2\overline{в}) = 3\overline{a}^2 - 2\overline{в a} + 6\overline{a в} - 4\overline{в}^2 = 3\overline{a}^2 + 4\overline{a в} - 4\overline{в}^2$

Оскільки правильні рівності

$\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2 = 9,\ \overline{в}^2 = |\overline{в}|^2 = 16,\ \overline{a в} = |\overline{a}||\overline{в}| \cos 120^0 = 3 \cdot 4 \cdot (-0{,}5) = -6$

то $A = 3 \cdot 9 + 4 \cdot (-6) - 4 \cdot 16 = -61;$

б) скориставшись формулою (2) , дістанемо

$|\overline{a} - \overline{в}| = \sqrt{(\overline{a} - \overline{в})^2} = \sqrt{\overline{a}^2 - 2\overline{a в} + \overline{в}^2} = \sqrt{9 - 2 \cdot (-6) + 16} = \sqrt{37}.$

2. Дано вектори $\overline{a} = \{1; 2; -2\}$ і $\overline{в} = \{3; 3; -4\}$. Знайдіть:

а) скалярний добуток $(4\overline{a}+3\overline{в})(\overline{a}-2\overline{в})$; б) кут між векторами $\overline{a}+\overline{в}$ та $\overline{a}-\overline{в}$.
Розв'язання.
а) $4\overline{a}+3\overline{в}=\{4;8;-8\}+\{9;9;-12\}=\{13;17;-20\}$,
$\overline{a}-2\overline{в}=\{1;2;-2\}-\{6;6;-8\}=\{-5;-4;6\}$,
$(4\overline{a}+3\overline{в})(\overline{a}-2\overline{в})=13\cdot(-5)+17\cdot(-4)-20\cdot 6=-253$;

б) $\overline{c}=\overline{a}+\overline{в}=\{4;5;-6\}$, $\overline{d}=\overline{a}-\overline{в}=\{-2;-1;2\}$,

$$\cos\varphi=\frac{\overline{c}\cdot\overline{d}}{|\overline{c}||\overline{d}|}=\frac{4\cdot(-2)+5\cdot(-1)-6\cdot 2}{\sqrt{4^2+5^2+6^2}\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{-25}{3\sqrt{77}},$$

звідси $\varphi=\pi-arccos\frac{25}{3\sqrt{77}}$.

3. Дано вектори $\overline{a}=\overline{i}-\overline{j}+4\overline{к}$, $\overline{в}=6\overline{i}+5\overline{j}+4\overline{к}$, $\overline{c}=-2\overline{i}-3\overline{j}+4\overline{к}$. Знайдіть вектор $\overline{x}$, який задовольняє рівності: $\overline{x}\cdot\overline{a}=8$, $\overline{x}\cdot\overline{в}=-3$ та $\overline{x}\cdot\overline{c}=13$.
Розв'язання. Нехай $\overline{x}=\{x_1,x_2,x_3\}$, тоді умова $\overline{x}\cdot\overline{a}=8$ рівносильна рівнянню $x_1-x_2+4x_3=8$. Аналогічно дістаємо ще два рівняння
$6x_1+5x_2+4x_3=-3$ та $-2x_1-3x_2+4x_3=13$. Розв'язавши систему

$$\begin{cases} x_1-x_2+4x_3=8,\\ x_1+5x_2+4x_3=-3,\\ -2x_1-3x_2+4x_3=13,\end{cases}$$

дістанемо значення : $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=2$.
Відповідь: $\overline{x}=\{-1;-1;2\}$.

4. Точки $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$ - вершини трикутника АВС. Знайдіть кут у трикутнику при вершині В і проекцію вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{BC}$.
Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$, що збігаються з відповідними сторонами трикутника:
$\overline{BA}=\{3;0;4\}$, $\overline{BC}=\{7;0;1\}$.
Косинус кута φ між векторами $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$ знаходимо за формулою

$$\cos\varphi=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}||\overline{BC}|}=\frac{3\cdot 7+0\cdot 0+4\cdot 1}{\sqrt{9+0+4}\sqrt{49+0+1}}=\frac{25}{25\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

звідки $\varphi=45^0$. Отже, $\angle B=45^0$.
Проекцію вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{BC}$ знайдемо за формулою:

$$np_{\overline{BC}}\overline{AB}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BC}|}=\frac{-3\cdot 7+0+(-4)\cdot 1}{\sqrt{50}}=\frac{-25}{5\sqrt{2}}=-\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

5. Нехай точки $A(1;4)$, $B(-2;5)$, $C(-3;a)$, $Д(3;-3)$ - послідовні вершини чотирикутника АВСД. При якому значенні a діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні?

Розв'язання. Утворимо вектори :

$\overline{AC} = (-4, a-4)$, $\overline{BД} = (5, -8)$.

Діагоналі чотирикутника будуть взаємно перпендикулярні тоді, коли скалярний добуток $\overline{AC} \cdot \overline{BД} = 0$, тобто

$$-4 \cdot 5 + (a-4)(-8) = 0,$$

звідки дістанемо a=1,5.

Поточний контроль за вивчеою темою

Підведення підсумків практичного заняття (виставлення балів та оцінок)

Перелік питань до практичного заняття

1.Основні поняття про вектор

2.Скалярний добуток

Домашнє завдання:

[3], с. 75…84

[6], с. 124

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема Векторний добуток векторів.

Мета вдосконалити знання і навички розв'язання задач з векторами, вміння знаходити скалярний та векторний добуток векторів.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*; *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе**:** *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	50хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 84…95	15хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

Навчальні матеріали

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1.Що таке вектор
2.Які вектори називаються колінеарними
3.Які вектори – рівні?
4.Як знайти довжину вектора

5.Що таке скалярний добуток двох векторів

6.Що таке векторний добуток двох векторів

7.Як обчислити площу трикутника, якщо задані координати вершин?

8.Як обчислити проекцію вектора на вектор?

9.Сформулюйте формулу для обчислення кута між векторами

Розв'язування прикладів

1. Дано вершини трикутника $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(3;\ 2;\ -1)$ і $C(5;\ -3;\ 4)$. Знайти:

1) довжину сторін АС і АВ;

2) площу трикутника;

3) кут А;

4) проекцію вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$.

2. Дано вершини трикутника $A(5;\ 4;\ -1)$, $B(-3;\ 6;\ 3)$ і $C(-2;\ -1;\ 3)$. Знайти:

1) довжину сторін АС і АВ;

2) площу трикутника;

3) кут А;

4) проекцію вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$.

Приклади розв'язання типових задач.

1. Обчисліть $|(3\overline{a}-2\overline{в})\times(\overline{a}+2\overline{в})|$, якщо $|\overline{a}|=3$, $|\overline{в}|=4$, $\varphi=30^0$.

Розв'язання. Оскільки

$$(3\overline{a}-2\overline{в})\times(\overline{a}+2\overline{в})=3\overline{a}\times\overline{a}-2\overline{в}\times\overline{a}+6\overline{a}\times\overline{в}-4\overline{в}\times\overline{в}=$$
$$=\overline{0}+2\overline{a}\times\overline{в}+6\overline{a}\times\overline{в}-\overline{0}=8\overline{a}\times\overline{в},$$

то

$$|(3\overline{a}-2\overline{в})\times(\overline{a}+2\overline{в})|=8|\overline{a}\times\overline{в}|=8|\overline{a}||\overline{в}|\sin 30^0=8\cdot 3\cdot 4\cdot 0{,}5=48.$$

2. Знайдіть вектор $(2\overline{a}-\overline{в})\times(3\overline{a}+2\overline{в})$, якщо $\overline{a}=\{2;3;1\}$, $\overline{в}=\{-2;4;0\}$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо

$2\overline{a}-\overline{в}=\{4;6;2\}-\{-2;4;0\}=\{6;2;2\}$,

$3\overline{a}+2\overline{в}=\{6;9;3\}+\{-4;8;0\}=\{2;17;3\}$.

Тоді

$$(2\overline{a}-\overline{в})\times(3\overline{a}+2\overline{в})=\begin{vmatrix}\overline{i}&\overline{j}&\overline{k}\\6&2&2\\2&17&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2\\17&3\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}6&2\\2&3\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}6&2\\2&17\end{vmatrix}\overline{k}=$$
$$=-28\overline{i}-14\overline{j}+98\overline{k}.$$

3. Обчисліть площу грані АВС і об'єм піраміди, вершини якої містяться в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $Д(4;1;3)$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AД}$, на яких побудована піраміда:

$\overline{AB}=\{3;6;3\}$, $\overline{AC}=\{1;3;-2\}$, $\overline{AД}=\{2;2;2\}$.

Площу грані АВС визначаємо за формулою: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

Маємо

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -21\bar{i} + 9\bar{j} + 3\bar{k} = 3\left(-7\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}\right);$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{(-7)^2 + 3^2 + 1^2} = \frac{3}{2}\sqrt{59}.$$

Об'єм піраміди $V_{ABCД}$ дорівнює 1/6 частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AД}$, тобто

$$V_{ABCД} = \frac{1}{6} mod \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} mod(-18) = 3.$$

Отже, $S_{\Delta ABC} = \frac{3}{2}\sqrt{59}$ *кв.од.*, $V_{ABCД} = 3$ *куб.од.*

4. Доведіть, що вектори $\overline{a} = \{2; 1; 3\}$, $\overline{в} = \{2; -3; 1\}$ і $\overline{c} = \{1; 2; 1\}$ утворюють базис, і розкладіть вектор $\overline{p} = \{0; 11; 3\}$ за цим базисом.

Розв'язання. Нагадаємо, що базисом у просторі називають довільну упорядковану трійку некомпланарних векторів. Тому дані вектори утворюють базис, якщо мішаний добуток цих векторів не дорівнює нулю. Перевіримо цю умову:

$$\overline{a}\,\overline{в}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

Отже, вектори $\overline{a}$, $\overline{в}$ і $\overline{c}$ - базис.

Вектор $\overline{p}$ розкладений за базисом $\overline{a}$, $\overline{в}$ і $\overline{c}$, якщо $\overline{p} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{в} + \gamma\overline{c}$, $\alpha, \beta, \gamma -$ невідомі числа (координати вектора $\overline{p}$ у даному базисі).

Запишемо векторне рівняння у розгорнутому вигляді

$$0 \cdot \bar{i} + 11 \cdot \bar{j} + 3 \cdot \bar{k} = \alpha\left(2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}\right) + \beta\left(2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}\right) + \gamma\left(\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}\right)$$

або

$$0 \cdot \bar{i} + 11 \cdot \bar{j} + 3 \cdot \bar{k} = (2\alpha + 2\beta + \gamma)\bar{i} + (\alpha - 3\beta + 2\gamma)\bar{j} + (3\alpha + \beta + \gamma)\bar{k}.$$

Враховуючи умову рівності двох векторів, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha + 2\beta + \gamma \\ 11 = \alpha - 3\beta + 2\gamma \\ 3 = 3\alpha + \beta + \gamma \end{cases}$$

Звідси $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 2$.

Отже, $\overline{p} = \overline{a} - 2\overline{в} + 2\overline{c}$.

Домашнє завдання:

[3], с. 84…95

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема Перетин двох прямих. Кут між ними.

Мета вдосконалити навички розв'язку задач за цією темою.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, яке має на меті привернути увагу, забезпечити контакт викладача з аудиторією; *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе**:** *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	50хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3] с. 102…111 [5] с. 204..209 [2] с. 35	15хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки* (аналіз, узагальнення та систематизація знань, умінь, навичок), *закріплення вивченого матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.

2. Фартушний, І.Д. Математика для економістів. Конспект лекцій:[Текст] / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: І.Д.Фартушний.- К.:КПІ ім.Ігоря Сікорського,2019.-109с

Навчальні матеріали

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1.Які види рівняння прямої ви знаєте?

2.Як знайти кут між прямими?

3.Які прями називаються паралельними?

4.Які прями називаються перпендикулярними?

Розв’язування прикладів

1. Нехай точки А(3;1), В(2;-3), С(-1;2) – вершини трикутника АВС. Складіть:
а) загальне рівняння сторони АВ;
б) канонічне рівняння висоти АД;
в) параметричне рівняння медіани ВМ;
г) рівняння прямої, що проходить через точку С(-1;2) паралельно до сторони АВ.

Розв'язання. Побудуємо рис.6 і розглянемо випадки:
а) оскільки відомі координати точок А і В, то, використовуючи формулу (4), складемо рівняння прямої, яка проходить через точки А і В:
$\frac{x-3}{2-3}=\frac{y-1}{-3-1}$, $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{-4}$, $y-1=4(x-3)$,
звідки $4x-y-11=0$ - загальне рівняння прямої, що містить сторону АВ;

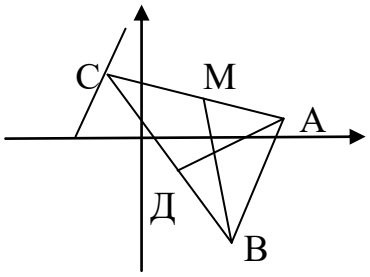


Рис.6

б) щоб записати канонічне рівняння прямої, потрібно знати точку, через яку проходить пряма, і напрямний вектор. Вектор $\overline{BC}=\{-3;5\}$ для висоти АД є нормальним вектором, тоді вектор $\overline{a}=\{5;3\}$ буде перпендикулярним до вектора $\overline{BC}$ (оскільки скалярний добуток $\overline{BC}\cdot\overline{a}=0$), отже, для прямої АД – напрямним вектором. Записуємо канонічне рівняння прямої АД:

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y-1}{3};$$

в) оскільки точка М – середина відрізка АС, то $x_M=\frac{3-1}{2}=1$, $y_M=\frac{1+2}{2}=1{,}5$. Вектор $\overline{BM}=\{1-2;1{,}5+3\}=\{-1;4{,}5\}$ - напрямний вектор прямої ВМ. За напрямний вектор можна взяти також вектор $\overline{a}=2\overline{BM}=\{-2;9\}$. Отже, $l=-2$, $m=9$ і параметричні рівняння медіани записуємо так:

$$\begin{cases} x=2-2t \\ y=-3+9t \end{cases},\ t\in R;$$

г) оскільки пряма, що проходить через точку С(-1;2), паралельна стороні АВ, то за нормальний вектор шуканої прямої беремо вектор $\overline{n} = (4; -1)$ - нормальний вектор прямої АВ. Тоді шукане рівняння має вигляд

$$4(x+1) - (y-2) = 0, \text{ або } 4x - y + 6 = 0.$$

1. Обчислити кут між прямими

1) $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{-3\sqrt{3}}$ і $\frac{x+3}{-3} = \frac{y}{-3\sqrt{3}}$

2) $\frac{x-6}{1} = \frac{y}{3}$ і $\frac{x+3}{3} = \frac{y-6}{1}$

3) $x + 5y + 9 = 0$ і $2x - 3y + 1 = 0$

4) $2x + y - 5 = 0$ і $3x - y + 4 = 0$

5) $y = -2x + 5$ і $y = 3x + 4$

6) $y = \sqrt{3}x + 7$ і $y = -\sqrt{3}x - 2$

Перелік питань до практичного заняття

1.Основні види рівнянь прямої

2.Кут між прямими на площині.

3.Умови паралельності та перпендикулярності прямих на площині

Домашнє завдання:

[3] с. 102…111

[5] с. 204..209

[2] с. 35

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема Умови паралельності і перпендикулярності прямих.

Мета вдосконалити навички розв'язувати практичні завдання з даної теми

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, яке має на меті привернути увагу, забезпечити контакт викладача з аудиторією; *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе**:** *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	50хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3] с. 209…211 [5], с. 204…211 [6], с. 141 [1], с. 80	15хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки* (аналіз, узагальнення та систематизація знань, умінь, навичок), *закріплення вивченого матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.

6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1.Які види рівняння прямої ви знаєте?

2.Як знайти кут між прямими?

3.Які прями називаються паралельними?

4.Сформулюйте умову паралельності двох прямих

5.Які прями називаються перпендикулярними?

6.Сформулюйте умову перпендикулярності двох прямих

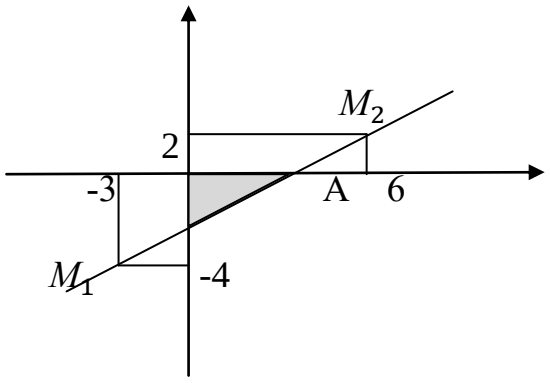
7.Як знайти відстань від точки до прямої

1. Обчисліть площу трикутника, обмеженого прямою, що проходить через точки $M_1(-3;-4)$ і $M_2(6;2)$, і осями координат (рис.7).

Розв'язання. Користуючись формулою (4), складемо рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 і M_2:

$\frac{x+3}{6+3}=\frac{y+4}{2+4}$, $\frac{x+3}{9}=\frac{y+4}{6}$, $\frac{x+3}{3}=\frac{y+4}{2}$, $2(x+3)=3(y+4)$,

$2x-3y-6=0$ - загальне рівняння прямої M_1M_2.



M_2

Знайдемо координати точок перетину прямої M_1M_2 з осями координат.

Нехай $x=0$, тоді $-3y-6=0$, або $y=-2$. Якщо $y=0$, то $2x-6=0$, або $x=3$.

Отже, пряма перетинає вісь Ох у точці А(3;0), а вісь Оу – у точці В(0;-2). Довжина катетів у трикутнику АОВ відповідно дорівнює: ОА=3, ОВ=2, тоді площа трикутника: $S_{AOB}=3$ *кв.од*.

2. Знайдіть відстань між прямими $4x-3y+2=0$ та $8x-6y-13=0$.

Розв'язання. Оскільки задані прямі паралельні, то відстань між ними дорівнює, наприклад, відстані від довільної точки другої прямої до першої. Знаходимо довільну точку на прямій $8x-6y-13=0$: нехай $x=0$, тоді $y=-\frac{13}{6}$. Відстань від точки М$(0;-\frac{13}{6})$ до прямої $4x-3y+2=0$ обчислюємо за формулою (14):

$$d=\frac{|4\cdot 0-3\cdot(-13/6)+2|}{\sqrt{16+9}}=1{,}7.$$

4. Визначте, при яких значеннях m і n прямі $mx+8y+n=0$ та $2x+my-1=0$:
а) паралельні; б) збігаються; в) перпендикулярні.

Розв'язання.

а) умова паралельності: $\frac{m}{2}=\frac{8}{m}$, звідси $m^2=16,\ m=\pm4$;

б) прямі збігаються у разі виконання умови

$$\frac{m}{2}=\frac{8}{m}=\frac{n}{-1},$$

звідси дістаємо дві пари значень $m=4, n=-2$ або $m=-4,\ n=2$;

в) умова перпендикулярності прямих: $m\cdot 2+8\cdot m=0$, тобто $m=0$.

Відповідь: а) $m=\pm4,\ n\in R$; б) $m=4, n=-2;\ m=-4,\ n=2$; в) $m=0, n\in R$.

Приклади 1. Знайти кут між прямими:

1) $3x-4y+1=0$ і $5x-12y+3=0$;

2) $y=-3x+7$ і $y=2x+1$.

Розв'язок.

1) прямі задані загальними рівняннями, тому для знаходження кута між ними використаємо формулу $\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$, в якій покладемо $A_1=3, B_1=-4, A_2=5, B_2=-12$, тобто

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot5+(-4)\cdot(-12)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{15+48}{5\cdot13}=\frac{63}{65}\approx0{,}96,$$

значить $\varphi=\arccos0{,}96\approx16°$;

2) Поклавши $k_1=-3, k_2=2$ у формулі $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$, одержимо $\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)\cdot2}\right|=1$, тобто $\varphi=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}=45°$.

Приклади 2. Довести, що прямі:

1) $4x-6y+7=0$ і $20x-30y-11=0$ паралельні;

2) $y=0{,}6x+1{,}4$ і $y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{2}$ перпендикулярні.

Розв'язок.

1) знайдемо згідно формули $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ відношення відповідних координат нормальних векторів $\frac{4}{20}=\frac{-6}{-30}=\frac{1}{5}$, отже, умова паралельності прямих, заданих загальними рівняннями, виконується, значить, задані прямі є паралельними, що і треба було довести;

2) перевіримо виконання умови перпендикулярності прямих, заданих рівняннями з кутовими коефіцієнтами, за формулою $k_2=-\frac{1}{k_1}$, $0{,}6=-\frac{1}{-\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}$, отже, прямі перпендикулярні, що і треба було довести.

Приклади 3. Медіани *BM* і *CN* (рис. 9.23) трикутника *ABC* лежать на прямих $l_1: x+y-3=0$ та $l_2: 2x+3y-1=0$, а точка $A(1;1)$ – вершина трикутника. Скласти рівняння прямої *BC*.

Розв'язок.

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} x+y-3=0, \\ 2x+3y-1=0, \end{cases}$ знайдемо точку перетину прямих l_1 і l_2, тобто медіан: $O(8;-5)$. З властивості точки перетину медіан маємо: $\frac{AO}{OP}=\frac{2}{1}=\lambda$, де *P* – точка перетину медіани *AO* із стороною *BC*. Застосувавши формули $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$, знайдемо координати точки *P*: $\frac{1+2x_P}{1+2}=8\Rightarrow x_P=\frac{23}{2}$, $\frac{1+2y_P}{1+2}=-5\Rightarrow y_P=-8$. Оскільки точки $B\in l_1$ і $C\in l_2$, то їхні координати задовольняють рівняння цих прямих. Точка *P* ділить відрізок *BC* навпіл, отже, можна скласти наступну систему рівнянь

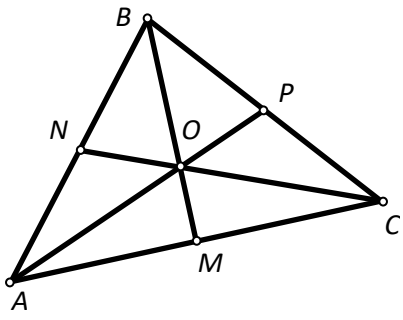


Рис. 9.23

$$\begin{cases} \frac{x_B+x_C}{2}=\frac{23}{2}, \\ \frac{y_B+y_C}{2}=-8, \\ x_B+y_B-3=0, \\ 2x_C+3y_C-1=0, \end{cases}$$

звідки $x_C = 11, y_C = -7$. Пряма BC проходить через точки $P\left(\frac{23}{2}; -8\right)$ і $C(11; -7)$, тому складемо її рівняння за формулою $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, тобто $\frac{x - \frac{23}{2}}{11 - \frac{23}{2}} = \frac{y + 8}{-7 + 8}$, і в результаті отримаємо $(BC): 2x + y - 15 = 0$.

Приклади завдань:

2. При якому значенні b прямі $\frac{\mathrm{x} - \mathbf{2}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathrm{y} + \mathbf{4}}{\mathbf{5}}$ і $\frac{\mathrm{x} + \mathbf{1}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{y} - \mathbf{6}}{\mathbf{30}}$ паралельні?

3. При якому значенні a прямі $\frac{\mathrm{x} + \mathbf{3}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathrm{y} - \mathbf{3}}{\mathrm{a}}$ і $\frac{\mathrm{x}}{-\mathbf{3}} = \frac{\mathrm{y} + \mathbf{4}}{\mathbf{24}}$ перпендикулярні?

4. Дослідить розміщення поданих пар прямих:

1) $\mathrm{x} + \mathrm{y} - \mathbf{3} = \mathbf{0}$ і $\mathbf{3}\mathrm{x} + \mathbf{3}\mathrm{y} - \mathbf{9} = \mathbf{0}$

2) $\mathrm{x} = \mathbf{4}$ і $\mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathbf{0}$

3) $\mathrm{y} = \mathbf{0}$ і $\mathrm{y} - \mathbf{7} = \mathbf{0}$

4) $\mathbf{2}\mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ і $\mathbf{2}\mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathbf{5} = \mathbf{0}$

5. Складіть рівняння прямих, перпендикулярних до прямої $\mathbf{2}\mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathbf{0}$, якщо відстань від початку координат до цих прямих дорівнює 3

Перелік питань до практичного заняття

1.Основні види рівнянь прямої

2.Кут між прямими на площині.

3.Умови паралельності та перпендикулярності прямих на площині

Домашнє завдання:

[3] с. 209…211

[5], с. 204…211

[6], с. 141

[1], с. 80

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема Коло, його рівняння. Еліпс, його рівняння

Мета вдосконалити навички розв'язку задач за даною темою.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [5], с. 211…214	10хв	Включає в себе: *узагальнення*, *теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.

Навчальні матеріали

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1.Сформулюйте означення кола.

2.Що таке радіус кола?

3.Запишіть загальне рівняння кола.

4. Запишіть канонічне рівняння кола.

5. Сформулюйте означення еліпса.

6. Які основні елементи еліпса?

7.Запишіть загальне рівняння еліпса.

4. Запишіть канонічне рівняння еліпса.

Розв’язування прикладів

Приклад 1.

Скласти рівняння кола з радіусом R=5 і з центром у початку координат.

Розв'язок. Безпосередньо підставляючи дані прикладу у формулу (2), отримаємо

$x^2 + y^2 = 25$

Приклад 2.

Скласти рівняння кола з радіусом R=9 і з центром у точці C(3;-6).

Розв'язок. Підставляючи значення координат точки C і значення радіуса у формулу (1), одержимо

$(x-3)^2 + (y-(-6))^2 = 81,\ (x-3)^2 + (y+6)^2 = 81.$

Приклад 3.

Довести, що рівняння $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ є рівнянням кола. Знайдіть його центр і радіус.

Розв'язок. Перетворимо ліву частину заданого рівняння

$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 2y + 1 - 1 - 4 = 0,$

тоді $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$. Це рівняння є рівнянням кола з центром у точці (-2; 1), а радіус кола дорівнює 3.

Приклад 4.

Знайти координати центра і радіус кола: $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0.$

Розв'язок. Оскільки коефіцієнти при x^2 і y^2 рівні, то дане рівняння є рівнянням кола.

Перетворимо його:

Рівняння $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$ поділимо на коефіцієнт який стоїть при x^2 і y^2.

$x^2 + y^2 - 4x + \frac{5}{2}y - 2 = 0$, згрупуємо і виділимо повні квадрати:

$$(x^2 - 4x) + \left(y^2 + \frac{5}{2}y\right) - 2 = 0, \qquad (x^2 - 4x + 4) + \left(y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right) = 2 + 4 + \frac{25}{16}$$

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{121}{16}.$$

Отже, центр цього кола лежить у точці $\left(2; -\frac{5}{4}\right)$, а радіус кола - $R = \frac{11}{4}$.

Приклад 5.

Скласти рівняння кола, що проходить через точки A(5; 0), B(1; 4), якщо відомо, що центр його міститься на прямій $x + y - 3 = 0.$

Розв'язок. Якщо коло проходить через точки A і B, то їхні координати задовольняють рівняння кола, отже:

$(5-a)^2+(0-b)^2=R^2$ і $(1-a)^2+(4-b)^2=R^2$.

Якщо центр кола лежить на прямій $x+y-3=0$, то координати центра задовольняють це рівняння, отже $a+b-3=0$.

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}(5-a)^2+b^2=R^2,\\(1-a)^2+(4-b)^2=R^2,\\a+b-3=0,\end{cases}\qquad\begin{cases}(5-a)^2+b^2=(1-a)^2+(4-b)^2,\\a=3-b,\end{cases}$$

Окремо розв'яжемо перше рівняння системи:

$(5-a)^2+b^2=(1-a)^2+(4-b)^2$,

$25-10a+a^2+b^2=1-2a+a^2+16-8b+b^2$

$-8a=-8b-8,\quad a=b-1$

2) Прирівняємо значення a з першого та другого рівнянь, тоді одержимо:

$3-b=b+1,\quad 2b=2,\quad b=1$

Оскільки $a=3-b$, то при $a=2,\ b=1$.

Отже, $a=2,\ b=1$ - координати центра кола C(2; 1). Знайдемо радіус кола:

$R^2=(1-a)^2+(4-b)^2$,

$R^2=(1-2)^2+(4-1)^2=1+9=10$.

Отже, рівняння кола має вигляд: $(x-2)^2+(y-1)^2=10$.

Приклад 6.

Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точку M(5; 0), якщо фокальна відстань дорівнює 6.

Розв'язок. За умовою $|F_1F_2| = 6$, тому c = 3. Канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. За умовою точка M(5; 0) належить еліпсу, отже, її координати задовольняють його рівняння, тому $\frac{25}{a^2}=1,\ a^2=25$. З рівності $a^2-c^2=b^2$ знаходимо $b^2=25-9=16$. Отже, шуканим рівнянням еліпса є рівняння $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

Приклад 7.

Довести, що рівняння $36x^2+100y^2-3600=0$ є рівнянням еліпса. Знайти координати фокусів і фокальну відстань.

Розв'язок. Розділимо обидві частини рівняння на 3600 й отримаємо:

$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$- яке є рівнянням еліпса. З рівності $a^2-c^2=b^2$ випливає , що $c^2=a^2-b^2$.

Оскільки $a^2=100$ і $b^2=36$,то $c^2=64$, а значить с = 8. фокуси еліпса розташовані в точках $F_1(-8;0)$ і $F_1(-8;0)$ $F_2(8;0)$. Фокальна відстань $|F_1F_2|=16$.

Приклад 8. На еліпсі $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$ знайдіть точки, для яких відстані від лівого фокуса більші відстані від правого фокуса в три рази.

Розв'язок. За формулою (5), знаючи, що $r_2=3r_1$, отримаємо рівняння, з якого визначимо абсцису x:

$$a+\varepsilon x=3(a-\varepsilon x),$$

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{36-11}}{6}=\frac{5}{6},$$

Тоді, підставивши $a=6$, $\varepsilon=\frac{5}{6}$ отримаємо:

$$6+\frac{5}{6}x=3\cdot 6-3\cdot\frac{5}{6}x,\quad \frac{5}{6}x+\frac{5}{2}x=12,\quad \frac{5+15}{6}x=12$$

$$\frac{20}{6}x=12,\quad x=\frac{12\cdot 6}{20}=\frac{18}{5}$$

Знайдену абсцису $x=\frac{18}{5}$ підставимо у задане рівняння еліпса:

$$\frac{\left(\frac{18}{5}\right)^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1,\quad \frac{324}{900}+\frac{y^2}{11}=1,\quad \frac{y^2}{11}=1-\frac{324}{900}$$

$$\frac{y^2}{11}=\frac{576}{900},\quad y^2=\frac{576\cdot 11}{900},\quad y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{11}$$

Отже, шукані точки мають координати: $M_1\left(\frac{18}{5};\frac{4}{5}\sqrt{11}\right)$, $M_2\left(\frac{18}{5};-\frac{4}{5}\sqrt{11}\right)$.

Приклади завдань:

1.Складіть рівняння кола з центром в точці $(5;-7)$ і проходить через точку $(2;-3)$.

2.Скласти рівняння кола, що проходить через точки $A(3;1)$, $B(-2;6)$ і $C(-5;-3)$.

4.Знайти координати центра і радіус кола: 1) $x^2+y^2-8x-10y-8=0$. 2) $x^2+y^2+12y-13=0$;

5.Складіть рівняння кола з центром на початку координат і радіусом, рівним $\sqrt{3}$;

6.Складіть рівняння кола з центром в точці (-1; 4) і проходить через точку (3; 5).

8.Складіть рівняння кола, що проходить через початок координат і має центр в точці (-2; 3).

12.Скласти рівняння еліпса, якщо дві його вершини знаходяться в точках $A_1(-6;0)$ і $A_2(6;0)$, а фокуси - в точках $F_1(-4;0)$ і $F_2(4;0)$.

13.Скласти рівняння еліпса, якщо дві його вершини знаходяться в точках $B_1(-8;0)$ і $B_2(8;0)$, а фокуси - в точках $F_1(0;-6)$ і $F_2(0;6)$.

14. Скласти рівняння еліпса, якщо відстань між фокусами дорівнює 6 (фокуси лежать на осі Ox) і велика вісь дорівнює 10.

15.Дан еліпс $x^2/100+y^2/51=1$. Обчислити його ексцентриситет.

16. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться в точках (-4; 0) і (4; 0), а ексцентриситет $e=0{,}8$.

Питання для підготовки до практичного заняття:

1. Коло та його рівняння

2. Еліпс та його рівняння

Домашнє завдання:

[5], с. 211…214

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема Гіпербола, її рівняння. Парабола з вершиною у початку координат

Мета вдосконалити навички розв'язку задач за даною темою.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*; *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 136…140 [5], с. 221…222	10хв	Включає в себе: *узагальнення*, *теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

5. Дутка, Г.Я. Практикум з математики для економістів [Текст] / Г. Я. Дутка.- Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.

Навчальні матеріали

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1.Що таке гіпербола?

2.Як виглядає канонічне рівняння гіперболи?

3.Як знайти ексцентриситет гіперболи?

4.Що таке парабола?

5.Як виглядає канонічне рівняння параболи?

6.Що таке директриса?

Розв'язування прикладів

Приклад 1.

Скласти рівняння гіперболи, якщо її фокуси знаходяться в точках $F_1(5;0)$ і $F_2(-5;0)$, причому дана гіпербола проходить через точку $M\left(6;4\sqrt{3}\right)$.

Розв'язок

За умови видно, що фокальна відстань $F_1F_2=10$, значить, $c=5$. Згідно з формулою $c^2-a^2=b^2$, $c^2=a^2+b^2$, підставивши значення *c*, маємо $a^2+b^2=25$. Так як точка *M* належить гіперболі, то її координати задовольняють рівняння цієї гіперболи, тобто $\frac{6^2}{a^2}-\frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2}{b^2}=1$, або $36b^2-48a^2=a^2b^2$. Розв'язавши систему з двох отриманих рівнянь, маємо $a^2=9, b^2=16$, отже, гіпербола, що проходить через точку $M\left(6;4\sqrt{3}\right)$ і має фокуси в точках $F_1(5;0)$ і $F_2(-5;0)$, записується рівнянням $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

Приклад 2. Скласти канонічне рівняння гіперболи, вершини якої знаходяться в точках $A_1(5;0)$ і $A_2(-5;0)$, а фокусна відстань дорівнює 14.

Розв'язок.

Маємо: $b=5$, $F_1F_2=14\Rightarrow 2c=14\Rightarrow c=7$. За формулою $c^2-a^2=b^2$, $b^2=c^2-a^2$, знаходимо $b^2=7^2-5^2=24$. Отже, $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$.

Приклад 3.

Скласти канонічне рівняння гіперболи, яка проходить через точку $M(2;1)$ і має асимптоти $y=\pm\frac{3}{4}x$.

Розв'язок.

З рівнянь асимптот $r_1=-\left(\frac{c}{a}x-a\right)$ і $r_2=-\left(\frac{c}{a}x+a\right)$, маємо $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$, тобто $b=\frac{3}{4}a$. Замінивши в рівнянні гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ змінні *x* і *y* координатами точки *M* та

значення параметра b, щойно знайдене, одержимо $\frac{2^2}{a^2}-\frac{1^2}{\left(\frac{3}{4}a\right)^2}=1$, звідки $a^2=\frac{20}{9}$. Так як $b=\frac{3}{4}a$, то $b^2=\frac{9}{16}a^2=\frac{9}{16}\cdot\frac{20}{9}=\frac{5}{4}$. Отже, шукане рівняння буде мати вигляд $\frac{x^2}{\frac{20}{9}}-\frac{y^2}{\frac{5}{4}}=1$ або $\frac{9x^2}{20}-\frac{4y^2}{5}=1$.

Приклад 4.

Знайти ексцентриситет гіперболи $16x^2-9y^2=144$.

Розв'язок.

Маємо $16x^2-9y^2=144$, тобто $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, значить, $a^2=9\Rightarrow a=3$ і $b^2=16\Rightarrow b=4$. За формулою $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ одержимо $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{9+16}}{3}=\frac{5}{3}$.

Приклад 5.

Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її директрисою є пряма $x=-4$.

Розв'язок.

Відстань від директриси до початку координат дорівнює $\frac{p}{2}$. Отже, $\frac{p}{2}=4$, тобто $p=8$. Рівняння цієї параболи має вигляд $y^2=2px$, так як абсциса директриси від'ємна. Підставивши в це рівняння значення параметра p, отримаємо $y^2=16x$.

Приклади 6. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її фокус знаходиться в точці $F(3;0)$.

Розв'язок.

Фокус параболи лежить на додатній напіввісі Ox, значить, рівняння параболи має вигляд $y^2=2px$. Так як координати фокуса $\left(\frac{p}{2};0\right)$М, то $p=6$. Підставивши значення параметра в рівняння $y^2=2px$, отримаємо $y^2=12x$.

Приклад 7. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, яка симетрична відносно осі Oy і проходить через точку $A(4;2)$.

Розв'язок.

Шукана парабола симетрична відносно осі Oy і проходить через точку $A(4;2)$, значить, рівняння параболи має вигляд $x^2=2py$. Підставивши в це рівняння координати точки A, знайдемо $p=4$. Після підстановки цього значення у вибране рівняння отримаємо $x^2=8y$.

Приклади 8.

Знайти координати фокуса параболи з вершиною в початку координат, якщо рівняння директриси $y = 3$.

Розв'язок.

Відстань від початку координат до директриси за означенням параболи дорівнює відстані від початку координат до фокуса, тобто $\frac{p}{2}$. З рівняння директриси випливає, що $\frac{p}{2} = 3$, отже цій директрисі відповідає парабола $x^2 = -2py$, фокус якої знаходиться в точці $(0; -3)$.

Приклади завдань:

1.Скласти рівняння гіперболи, якщо її вершини знаходяться в точках $A_1(-3;0)$ і $A_2(3;0)$, фокуси - в точках $F_1(-5;0)$ і $F_2(5;0)$.

2.Дано рівняння гіперболи $x^2/81 - y^2/144 = 1$. Знайти координати її вершин і фокусів.

3.Дано рівняння гіперболи $x^2/25 - y^2/11 = 1$. Знайти її ексцентриситет.

4.Дано рівняння гіперболи $x^2/144 - y^2/256 = 1$. Скласти рівняння її асимптот.

5.Скласти рівняння гіперболи, якщо відомі координати її фокусів (-20; 0) і (20; 0) і ексцентриситет $e = 5/3$.

6.Скласти рівняння гіперболи, якщо її асимптоти задані рівняннями $y = \pm(\sqrt{6}/3)x$ і вона проходить через точку (6; -4).

7.Знайти вершини, фокуси, ексцентриситет і асимптоти гіперболи $x^2/36 - y^2/64 = -1$.

8.Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox, якщо її дійсна вісь дорівнює 24, а уявна вісь дорівнює 40.

9.Дано рівняння гіперболи $x^2/14 - y^2/22 = 1$. Знайдіть координати її фокусів і відстань між ними.

10.Знайдіть ексцентриситет гіперболи: 1) $x^2/9 - y^2/7 = 1$; 2) $x^2/25 - y^2/24 = 1$.

11.Складіть рівняння асимптот гіперболи: 1) $x^2/64 - y^2/36 = 1$; 2) $x^2/9 - y^2/8 = 1$.

12.Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її фокус знаходиться в точці $F(3;0)$.

13.Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її директрисою служить пряма $x = -4$.

14.Знайти координати фокусу параболи з вершиною в початку координат, якщо рівняння директриси $x = -3$.

15.Складіть рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її фокус знаходиться в точці: 1) $F(5;0)$; 2) $F(-4;0)$; 3) $F(0;2)$; 4) $F(0;-3)$.

16.Складіть рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її директрисою служить пряма: 1) $x = -2$; 2) $x = 3$; 3) $y = -4$; 4) $y = 1$.

17.Складіть рівняння директриси параболи: 1) $y^2 = 8x$; 2) $y^2 = -9x$; 3) $x^2 = 4y$; 4) $x^2 = -10y$.

18.За даним рівнянням параболи обчисліть координату її фокусу: 1) $y^2 = 6x$; 2) $y^2 = -4x$; 3) $x^2 = 14y$; 4) $x^2 = -5y$.

Питання для підготовки до практичного заняття:

1. Гіпербола та її рівняння

2. Парабола та її рівняння

Домашнє завдання:

[3], с. 136…140
[5], с. 221…222

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема Диференціювання складеної функції.

Мета вдосконалити навички та вміння диференціювати елементарні та складені функції.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	50хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [6], с. 243 [1], с.207	15хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали

Похідна складеної функції

Якщо функція $u = g(x)$ має похідну в точці x, а функція $y = f(u)$ - у відповідній точці $u = g(x)$, то складена функція $y = f(g(x))$ диференційована в точці x, причому

$$y' = f'(u) \cdot g'(x).$$

Тобто, похідна складеної функції $y = f(u)$, $u = g(x)$ дорівнює добутку похідної від зовнішньої функції, взятої по внутрішньому аргументу u, і похідної від внутрішньої функції, взятої по незалежній змінній x

Знайти похідні складених функцій

7) $y = \sqrt[3]{(x^3 + 2x^2 - 4)^2}$

Розв'язання.

$y' = (\sqrt[3]{(x^3 + 2x^2 - 4)^2})' = ((x^3 + 2x^2 - 4)^{2/3})'$. Позначимо $u = x^3 + 2x^2 - 4$,

тоді $y = (u(x))^{2/3}$. Далі отримаємо

8) $y = 3^{\sin x}$

Розв'язання.

Позначимо $y = 3^u$, де $u = \sin x$,тоді отримаємо

$y' = (3^u)' = 3^u \ln 3 \cdot u' = 3^{\sin x} \ln 3 \cdot (\sin x)' = \ln 3 \cdot 3^{sim x} \cos x$

9) $y = arctg^2(x^3 + 1)$

Розв'язання.

$y' = (arctg^2(x^3 + 1))' = 2arctg(x^3 + 1) \cdot (arctg(x^3 + 1))' =$

$= 2arctg(x^3 + 1) \cdot \frac{1}{1 + (x^3 + 1)^2} (x^3 + 1)' = = 2arctg(x^3 + 1) \cdot \frac{3x^2}{1 + (x^3 + 1)^2} =$

$= \frac{6x^2 arctg(x^3 + 1)}{1 + (x^3 + 1)^2}$

Знайти похідні складених функцій.

1) $y = \cos^2 x + \sin(tgx)$ 2) $y = \ln^2(\arcsin x)$ 3) $y = 10^{\ln x} \cdot 3^{tgx}$ 4) $y = 5arctg(\ln x) - 1$

5) $y = \sqrt[3]{2x+1} arcctg\sqrt{x}$ 6) $y = \sin\sqrt{x} - 2\sin^3 x$ 7) $y = \ln(\arccos\sqrt{x})$ 8) $y = x^2 / (1 + \cos^2 2x)$

9) $y = \ln(\sin x) \cdot (3x^2 - \cos x)$ 10) $y = 4^{\sqrt{x}} \cdot \cos^3(\sqrt{x})$ 11) $y = \ln(x + \arccos 3x)$

12) $y = (1 + \cos x)^4 \sin 6x$ 13) $y = \ln^5 arctg10x$ 14) $y = e^{x^2} / x + \sin 3x$

15) $y = arctg\ln x / \ln arctgx$ 16) $y = 10^{2 - tg4x}$ 17) $y = (e^{-x^2} + x)\sin(3x + 1)$ 18) $y = (2 + \ln^2 \sin x)^3$

19) $y = tg^2 x - 2ctgx^2$ 20) $y = 2^{5^x} \cdot 4^{\cos x}$ 21) $y = x\cos^2 x - ctg3x$ 22) $y = \arcsin\ln 3x$

23) $y = x^3 / (1 + \sin^4 x)$ 24) $y = \sin(x^2 / x + 1)$ 25) $y = \sqrt[3]{(x^4 - 2x)^2} \arcsin x$

26) $y = \sqrt{1 - x^2} \ln(\arcsin x)$ 27) $y = tg(2^x)\ln(3x)$ 28) $y = \cos e^{\sin(x^2+1)}$

29) $y = 5^{1 - tg3x} ctg3^x$ 30) $y = \ln arctg(x - 1/x + 1)$ 31) $y = \cos(\sin(x^2 + 3))$ 32) $y = 6^{arctgx} - 2^{tgx}$

33) $y = x^3 e^{\sin 4x} - \ln(x / x + 1)$ 34) $y = \ln(\arcsin\sqrt{x - 1})$ 35) $y = \cos^2 3^{\sin x}$ 36) $y = 2^{x^2} / \sin x^2$

37) $y = e^{\sin 5x - 5\cos^2 x}$ 38) $y = \arcsin(\ln 4^{x^2})$ 39) $y = \cos^2 x / \sin(tgx)$ 40) $y = \ln^2(1/\arcsin x)$

Питання для підготовки до практичного заняття:

1. Похідна функції
2. Похідна складеної функції

Домашнє завдання:

[1], с. 207

[6], с. 243

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема	Інтегрування методом підстановки.
Мета	сформувати у студентів поняття інтегрування методом заміни змінної,
	розвинути у студентів практичні навички обчислювання інтеграла цим методом.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	50хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1], с. 336 [2], с. 83 [4], с. 79	15хв	Включає в себе: *узагальнення*, *теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

2. Фартушний, І.Д. Математика для економістів. Конспект лекцій:[Текст] / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: І.Д.Фартушний.- К.:КПІ ім.Ігоря Сікорського,2019.-109с

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали

Метод підстановки (заміни змінної). Внесення функції під знак диференціала

Суть методу підстановки полягає у введенні нової змінної. При знаходженні інтегралу $\int f(x)dx$ застосовують підстановки таких двох видів:

1) $x = \varphi(t)$ 2) $\omega(x) = t$

Тут $\varphi(t)$, $\omega(x)$ - неперервно-диференційованні функції

У першому випадку $dx = \varphi'(t)dt$ і $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$

Другу підстановку доцільно виконувати, якщо підінтегральний вираз можна подати у вигляді $f(x)dx = g(\omega(x))\omega'(x)dx$, тоді

$$\int f(x)dx = \int g\big(\omega(x)\big)\omega'(x)dx = \int g(\omega(x))d\omega(x) = \int g(t)dt$$

У цьому випадку функція $\omega'(x)$ вводиться під знак диференціала

$\omega'(x)dx = d\big(\omega(x)\big) = dt$

Підстановки слід підбирати так, щоб одержані інтеграли були табличними або зводились до простіших інтегралів.

Спільним в обох способах введення нової змінної є зворотний перехід від змінної t до змінної x.

Загальних методів підбору підстановок не існує. Але є широкі класи функцій, для яких будуть указані спеціальні типи підстановок.

Знайти інтеграли, використовуючи метод заміни змінної або внесення функції під знак диференціала.

1. $\int x\sqrt{2-x}\,dx = \begin{Bmatrix}\sqrt{2-x} = t\\ x = 2-t^2\\ dx = -2tdt\end{Bmatrix}$

$$= \int (2-t^2)\cdot t\cdot(-2t)dt = 2\int (t^4-2t^2)dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 + C$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(2-x)^5} - \frac{4}{3}\sqrt{(2-x)^3} + C$$

2. $\int \frac{dx}{1-e^x} = \begin{Bmatrix}1-e^x = t\\ x = \ln(1-t)\\ dx = \frac{dt}{t-1}\end{Bmatrix} = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)dt = \int \frac{d(t-1)}{t-1} - \int \frac{dt}{t} = \ln|t-1| -$

$\ln t + C = lnex -$ $-\ln /1-ex/+C = x-\ln 1-ex+C$

3. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \begin{Bmatrix}x = 2sint\\ dx = 2costdt\\ \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4sin^2t} = 2cost\end{Bmatrix} = \int 2cost\cdot 2costdt =$

$4cos2tdt = 21+cos2tdt = 2t+sin2t+C = sint = x/2t = \arcsin x2 sin2t = 2sintcost = 2arcsin x2 + x24 - x2 + C$

Вміючи достатньо диференціювати і знаючи таблиці інтегралів, змінну можна не вводити, а зразу вносити відповідну функцію під знак диференціала. При цьому часто використовують такі перетворення диференціала:

$dx = d(x+b), b$ – стала, $xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$ $cosxdx = d(sinx)$ $\frac{dx}{sin^2x} = -d(ctgx)$

$dx = \frac{1}{a}d(ax+b), a, b - сталі,$ $\frac{dx}{x} = d(lnx)$ $sinxdx = -d(cosx)$ $\frac{dx}{cos^2x} = d(tgx)$

4. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left\{xdx = \frac{1}{2}d(1+x^2)\right\} = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2) = \frac{1}{2}\int(1+$
x2)12d1+x2= =12·23(1+x2)32+C=133(1+x2)2+C

5. $\int x^3 e^{-x^4}dx = \begin{Bmatrix} d(-x^4) = -4x^3dx \\ x^3dx = -\frac{1}{4}d(-x^4) \end{Bmatrix} = -\frac{1}{4}\int e^{-x^4}d(-x^4) = -\frac{1}{4}e^{-x^4} + C$

6. $\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx = \int arctgxd(arctgx) = \frac{arctg^2x}{2} + C$

7. $\int ctgxdx = \begin{Bmatrix} ctgx = \frac{cosx}{sinx} \\ dsinx = cosxdx \end{Bmatrix} = \int \frac{cosx}{sinx}dx = \int \frac{d(sinx)}{sinx} = \ln|sinx| + C$

8. $\int \frac{x^3dx}{4+x^8} = \frac{1}{4}\int \frac{dx^4}{4+x^8} = \frac{1}{4}\int \frac{dx^4}{2^2+(x^4)^2} = \frac{1}{8}arctg\frac{x^4}{2} + C$

9. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx = \int \frac{(1+x^2)-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx - \int \frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{(1+x^2)^3}} =$

$= \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \frac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{3}{-2}}d(1+x^2) = \ln\,|x+\sqrt{1+x^2}\,| - \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C =$

$= \ln\left|x+\,\sqrt{1+x^2}\right| + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$

Питання для підготовки до практичного заняття:

1. Інтегрування методом підстановки.

Домашнє завдання:

[1], с. 336

[2], с. 83

[4], с. 79

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема	Інтегрування частинами.
Мета	сформувати у студентів поняття інтегрування методом інтегрування частинами, розвинути у студентів практичні навички обчислювання інтеграла цим методом.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	50хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 80…92	15хв	Включає в себе: *узагальнення*, *теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 295 с.

Навчальні матеріали

Метод інтегрування частинами

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді $\int udv = uv - \int vdu$ ця формула називається формулою інтегрування частинами. Вона дає змогу перейти від інтеграла $\int udv$ до інтеграла $\int vdu.$
Для відшукання інтеграла $\int f(x)dx$ за частинами вираз $f(x)dx$ намагаються подати у вигляді udv так, щоб інтеграл $\int vdu$ набував простішого вигляду порівняно з даним інтегралом.
Наведемо деякі типи інтегралів, які зручно знаходити методом інтегрування частинами:

1) Інтеграли виду $\int P(x)e^{kx}dx,\ \int P(x)sinkxdx,\ \int P(x)coskxdx$, де $P(x)$ – многочлен .У цих інтегралах за u слід узяти множник $P(x)$, а за dv - вираз , що залишився;
2) Інтеграли виду
   $\int P(x)lnxdx,\ \int P(x)arcsinxdx,\ \int P(x)arccosxdx,\ \int P(x)arctgxdx$,
   де $P(x)$ – многочлен .У цих інтегралах слід узяти $dv = P(x)dx$, а за u - вираз , що залишився;
3) Інтеграли виду $\int e^{\alpha x}sin\beta xdx,\ \int e^{\alpha x}cos\beta xdx$, де α, β - дійсні числа. Після двократного застосування методу інтегрування частинами утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. З цього рівняння знаходять інтеграл.

Знайти інтеграли, використовуючи метод інтегрування частинами.

1.$\int arcsinxdx = \begin{Bmatrix} u = arcsinx & dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{Bmatrix} = x \cdot arcsinx - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = xarcsinx +$
$+12d(1-x2)1-x2=xarcsinx+1-x2+C$

2.$\int xln(x+1)dx = \begin{Bmatrix} u = \ln(x+1) & dv = xdx \\ du = \frac{dx}{x+1} & v = \frac{x^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{1+x} = \frac{x^2}{2}\ln(x+$
$1--12x2-1+11+xdx=x22\ln x+1-12x-1dx-12dxx+1=x22\ln x+1-14(x-1)2--12\ln x+1+C$

3.$\int xe^{2x}dx = \begin{Bmatrix} u = x & dv = e^{2x}dx \\ du = dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{Bmatrix} = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$

4.$\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}dx = \begin{Bmatrix} u = x^2 - 2x + 5 & dv = e^{-x}dx \\ du = (2x-2)dx & v = -e^{-x} \end{Bmatrix} = -(x^2 - 2x + 5)e^{-x} +$
$+2x-1e-xdx=$

$$= \begin{Bmatrix} u = x-1 & dv = e^{-x}dx \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{Bmatrix}$$

$$= -(x^2 - 2x + 5)e^{-x} + 2(-e^{-x}(x-1) + \int e^{-x}dx + C_1) =$$

$$= -(x^2 - 2x + 5)e^{-x} - 2xe^{-x} + 2e^{-x} - e^{-x} + C = -(x^2 + 5)e^{-x} + C$$

Обчислити наступні інтеграли:

1. a) $\int (6-5x)e^{-3x}\,dx$ b) $\int x^2 cos3xdx$
2. a) $\int arctg\sqrt{8x-1}\,dx$ b) $\int (x^2+4)e^{-x}\,dx$
3. a) $\int (6x-3)cos2xdx$ b) $\int ln^2 2x\,dx$
4. a) $\int \ln(x^2+9)\,dx$ b) $\int x^2 sin\frac{x}{3}dx$
5. a) $\int xln^2 xdx$ b) $\int (x+1)^2 cosxdx$
6. a) $\int \frac{xdx}{sin^2 x}$ b) $\int \sqrt[3]{x} ln^2 xdx$
7. a) $\int x\,cos^2(x+1)dx$ b) $\int x^2 e^{-x/2}dx$
8. a) $\int x^2 lnxdx$ b) $\int (x^2-2)cosxdx$
9. a) $\int \frac{lnxdx}{x^3}$ b) $\int (arcsinx)^2 dx$
10. a) $\int xarctgxdx$ b) $\int \frac{x^2+2}{e^{3x}}dx$

Питання для підготовки до практичного заняття:
Інтегрування частинами.

Домашнє завдання:
[4], с. 80…92

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема	Рівняння з відокремлюваними змінними.
Мета	сформувати у студентів практичні навички визначення і обчислення диференціальних рівнянь першого порядку з розділяючимися змінними, знаходження їх загальних та частинних розв'язків.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	45хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1], с. 427	20хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали

Приклади розв'язування завдань.

1) Розв'язати рівняння $y' = x(y^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{y^2+1} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx;$$

$$arctgy = \frac{x^2}{2} + C; \qquad y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right);$$

2) Розв'язати рівняння $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$ при умові y(1) = 0.

$$\frac{ydy}{dx} + xe^y = 0$$

$$ydy + xe^y dx = 0; \qquad \frac{y}{e^y} dy = -xdx;$$

$$\int \frac{y}{e^y} dy = -\int xdx;$$

Інтеграл, який стоїть в лівій частині будемо обчислювати частинами.

$$\int ye^{-y} dy = \begin{Bmatrix} u = y; & e^{-y} dy = dv; \\ du = dy; & v = -e^y; \end{Bmatrix} = -e^y y - \int -e^y dy = -e^{-y} y - e^{-y} = -e^{-y}(y+1);$$

$$e^{-y}(y+1) = \frac{x^2}{2} + C_0;$$

$$2e^{-y}(y+1) = x^2 + C$$

Якщо y(1) = 0, то $2e^0(0+1) = 1 + C; \;\Rightarrow\; 2 = 1 + C; \;\Rightarrow\; C = 1;$

Звідси, частинний розв'язок : $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$.

3) Розв'язати рівняння $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$.

$$y' + \sin(x+y) - \sin(x-y) = 0$$

$$y' - 2\sin\frac{x-y-x-y}{2}\cos\frac{x-y+x+y}{2} = 0$$

$$y' - 2\sin(-y)\cos x = 0 \qquad y' + 2\sin y\cos x = 0$$

$$\frac{dy}{\sin y} = -2\cos xdx; \qquad \int \frac{dy}{\sin y} = -2\int \cos xdx;$$

Отримаємо загальний розв'язок: $\ln\left|tg\frac{y}{2}\right| = -2\sin x + C$

4) Розв'язати рівняння $2xe^{-x^2} + \frac{y'}{y} = 0$

Відокремлюємо змінні:

$$2xe^{-x^2} + \frac{dy}{ydx} = 0 \qquad 2xe^{-x^2} dx + \frac{dy}{y} = 0 \qquad \int 2xe^{-x^2} dx + \int \frac{dy}{y} = C$$

$$-e^{-x^2} + \ln|y| = C$$

Отримали загальний інтеграл даного диференціального рівняння. Якщо із цього співвідношення виразити шукану функцію y, то отримаємо загальний розв'язок.

5) Розв'язати рівняння $y' = x(y^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2+1) \qquad \frac{dy}{y^2+1} = xdx \qquad \int \frac{dy}{y^2+1} = \int xdx;$$

$$arctgy = \frac{x^2}{2} + C; \qquad y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

Допустим, заданы деякі початкові умови x_0 и y_0. Тоді:

$$arctgy_0 = \frac{x_0^2}{2} + C_0; \quad \Rightarrow \quad C_0 = arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2};$$

Отримаємо частинний розв'язок $y = tg\left(\frac{x^2}{2} + arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2}\right)$.

Завдання.

1. Знайти загальний розв'язок рівнянь:

1) $x^2dx = \mathbf{3}y^2dy$ 2) $\sqrt{x}dy = \sqrt{y}dy$ 3) $\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{\mathbf{3}dx}{\sqrt{y}}$

4) $xydx = \left(\mathbf{1} + x^2\right)dy$

5) $(\mathbf{1} + y)dx = (x - \mathbf{1})dy$ 6) $xdx + (y + \mathbf{1})dy = \mathbf{0}$

7) $\left(x + \mathbf{2}x^3\right)dx + \left(y + \mathbf{2}y^3\right)dy = \mathbf{0}$ 8) $y' = \frac{y - \mathbf{1}}{x + \mathbf{1}}$

9) $y' = e^{x-y}$ 10) $y' = \frac{\sqrt{y}}{x}$

2. Знайти частинний розв'язок рівняння, який задовольняє початковим умовам:

1) $ydy = xdx$ $y = \mathbf{4}$ $x = -\mathbf{2}$

2) $\frac{dy}{x^2} = \frac{\mathbf{3}dx}{y^2}$, $y(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$

Питання для підготовки до практичного заняття:

Розв'язування диференціальних рівнянь з розділяючимися змінними

Домашнє завдання:

[1], с. 427

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема	Лінійні диференціальні рівняння 1 порядку. Метод варіації довільної сталої. Метод Бернулі.
Мета	сформувати у студентів практичні навички знаходження загального і частинного розв'язків лінійного диференціального рівняння 1-го порядку методом варіації довільної сталої та методом Бернулі.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	45хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1], с. 461	20хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу*

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали

Приклади:

1) Розв'язати рівняння:

$y' + \frac{y}{x} = 1$

Розв'язування.

Дане диференціальне рівняння є лінійним неоднорідним першого порядку. Розв'яжемо його методом варіації.

$y' + \frac{y}{x} = 0$

$y' = -\frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$

$\ln y = \ln C - \ln x$

$y = \frac{C}{x}$

$y = \frac{C(x)}{x}$

$y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$

Підставимо у рівняння

$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = 1$

$\frac{C'(x)}{x} = 1$

$C'(x) = x$

$C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1$

Отже, отримаємо загальний розв'язок:

$y = \frac{\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)}{x}$

2) Розв'язати рівняння:

$y' - \frac{3y}{x} = x^3$

Розв'язування.

Дане диференціальне рівняння є лінійним неоднорідним першого порядку. Розв'яжемо його методом варіації.

$y' - \frac{3y}{x} = 0$

$y' = \frac{3y}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$

$\frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x}$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{3dx}{x}$

$\ln y = 3 \ln x + \ln C$

$\ln y = \ln x^3 + \ln C$

$y = Cx^3$

$y = C(x)x^3$

$y' = C'(x)x^3 + 3C(x)x^2$

Підставимо у рівняння

$C'(x)x^3 + 3C(x)x^2 - \frac{3C(x)x^3}{x} = x^3$

$C'(x)x^3 = x^3$

$C'(x) = 1$

$C(x) = x + C_1$

Отже, отримаємо загальний розв'язок:

$y = (x + C_1)x^3$

Завдання.

Знайти загальний розв'язок рівнянь:

1. $y' - 2xy = 1 - 2x^2$
2. $y' - \frac{y}{x} = x^2$
3. $y' - ytqx = \sin x$
4. $y' - \frac{y}{x} = 1$
5. $y' - \frac{3y}{x} = x^3$
6. $y' + 5y = e^{-2x}$

Розв'язати рівняння:

$y' - y = e^x$

Розв'язування.

Дане диференціальне рівняння є лінійним неоднорідним першого порядку. Розв'яжемо його методом Бернулі.

$y = uv \qquad y' = u'v + uv'$

$u'v + uv' - uv = e^x$

$u'v + u(v' - v) = e^x$

$v' - v = 0$

$\frac{dv}{v} = dx$

$\int \frac{dv}{v} = \int dx$

$\ln v = x + \ln C$

$v = Ce^x$

$v = e^x$

Підставимо v

$u'v = e^x$

$u'e^x = e^x$

$u' = 1$

$u = x + C_1$

Отже, отримаємо загальний розв'язок:

$y = (x + C_1)e^x$

Приклади.

1 $y' - y/x = x^2$ 2 $y' - y \cdot ctgx = 2x \cdot sinx,\ y(\pi/2) = 0$

3 $y' + y\cos x = \frac{1}{2} sin2x,\ y(0) = 0$

4 $y' + y \cdot tgx = cos^2 x,\ y(\pi/4) = 1/2$

5 $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x,\ y(-1) = 3/2$

6 $y' - \frac{1}{x+1} y = e^x(x+1),\ y(0) = 1$

7 $y' - \frac{y}{x} = xsinx, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ 8 $y' + \frac{y}{x} = sinx, y(\pi) = 1/\pi$

9 $y' + \frac{y}{2x} = x^2,\ y(1) = 1$ 10 $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, y(0) = \frac{2}{3}$

11 $y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5,\ y(2) = 4$ 12 $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x,\ y(1) = e$

13 $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x},\ y(1) = 1$ 14 $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, y(1) = 4$

15 $y' + \frac{2}{x} y = x^3,\ y(1) = -5/6$ 16 $y' + \frac{y}{x} = 3x,\ y(1) = 1$

17 $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2,\ y(1) = 3$ 18 $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1,\ y(1) = 1$

19 $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3},\ y(1) = 1$ 20 $y' + 2xy = -2x^3,\ y(1) = e^{-1}$

21 $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, y(0) = 2/3$ 22 $y' + xy = -x^3,\ y(0) = 3$

23 $y' - \frac{2}{x+1} y = e^x(x+1)^2, y(0) = 1$ 24 $y' + 2xy = xe^{-x^2} sinx, y(0) = 1$

Питання для підготовки до практичного заняття:

1. Розв’язування лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку методом варіації довільної сталої.
2. Розв’язування лінійних диференціальних рівнянь розв’язків лінійного диференціального рівняння 1-го порядку методом Бернулі.

Домашнє завдання:

[1], с. 461

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема	Границя функції та її обчислення. Перша та друга важливі границі.
Мета	сформувати у студентів практичні навички обчислення границі функції, формувати вміння обчислювати границю функції , користуючись першою і другою важливими границями та їх наслідками.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 4 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 178…206 [6], с. 208 [2], с. 46 [1], с 169	10хв	Включає в себе: *узагальнення*, *теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

2. Фартушний, І.Д. Математика для економістів. Конспект лекцій:[Текст] / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: І.Д.Фартушний.- К.:КПІ ім.Ігоря Сікорського,2019.-109с

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали

Розв'язування завдань

Порівняти нескінченно малі функції

1) $\alpha(x)=x^2+3x+2$ та $\beta(x)=tg(x+1)$, при $x\to -1$

Розв'язання. Знайдемо границю відношення даних функцій

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{tg(x+1)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+2)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x+2)=1$$

Отже функції $\alpha(x) i \beta(x)$ - нескінченно малі одного порядку.

2) $\alpha(x)=xarctgx^{-2}$ та $\beta(x)=(x-3)^{-1/3}$, при $x\to\infty$

Розв'язання. Знайдемо границю відношення даних функцій

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xarctgx^{-2}}{(x-3)^{-1/3}}=\{x-3\approx x\}=\lim_{x\to\infty}\frac{xarctgx^{-2}}{x^{-1/3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{arctgx^{-2}}{x^{-4/3}}=\{x^{-2}-t\}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{arctgt}{t^{2/3}}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t^{2/3}}=\lim_{t\to 0}t^{1/3}=0$$

Отже функція $\alpha(x)$ - нескінченно мала вищого порядку, ніж $\beta(x)$

3) $\alpha(x)=x^2+1$ та $\beta(x)=\dfrac{2x^3+3x+4}{2x+1}$, при $x\to\infty$

Розв'язання. Знайдемо границю відношення даних функцій

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\frac{2x^3+3x+4}{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)(2x+1)}{2x^3+3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x^2})(2+\frac{1}{x})}{2+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}=1$$

Отже функції $\alpha(x) i \beta(x)$ - еквівалентні $=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{(8+x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+x^2}+4)}=\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{12}$.

Обчислити границі функцій, використовуючи першу важливу границю.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x-3\cos 2x+2}{\cos x-\cos 3x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 2x-1)(\cos 2x-2)}{2\sin 2x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2\sin 2x\sin x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{2\sin 2x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}=\frac{1}{2};$$

3) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\pi-x=t\\ x\to\pi, t\to 0\end{array}\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(5\pi-5t)}{\sin(2\pi-2t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{-\sin 2t}=-\frac{5}{2};$

Обчислити границі функцій, використовуючи другу важливу границю.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{3x-2}=\{1^{\infty}\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-2}{x+1}-1\right)^{3x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{x+1}\right)^{3x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{x+1}{-3}\cdot\frac{-3}{x+1}(3x-2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3(3x-2)}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9x+6}{x+1}}=e^{-9}=\frac{1}{e^9}$

2) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{3x+6}{x+4}\right)^{\frac{2}{x+1}}=\{1^{\infty}\}=\lim\limits_{x\to-1}\left(1+\frac{3x+6}{x+4}-1\right)^{\frac{2}{x+1}}=\lim\limits_{x\to-1}\left(1+\frac{2(x+1)}{x+4}\right)^{\frac{2}{x+1}}=$

$=\lim\limits_{x\to-1}\left(1+\frac{1}{\frac{x+4}{2(x+1)}}\right)^{\frac{x+4}{2(x+1)}\cdot\frac{2(x+1)}{x+4}\cdot\frac{2}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to-1}\frac{4}{x+4}}=e^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{e^4}$;

Розв'язування завдань

Обчислити границі функцій, використовуючи першу важливу границю.

1) $\lim\limits_{x\to2}(x-2)tg\frac{\pi x}{4}=\{0\cdot\infty\}=\left\{\begin{matrix}x-2=t\\x\to2,t\to0\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{t\to0}t\cdot tg\frac{\pi(2+t)}{4}=\lim\limits_{t\to0}t\cdot tg(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{4})=$

$=\lim\limits_{t\to0}t(-ctg\frac{\pi t}{4})=-\lim\limits_{t\to0}\frac{t\cos\frac{\pi t}{4}}{\sin\frac{\pi t}{4}}=-\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{4}}=-\frac{4}{\pi}\lim\limits_{t\to0}\frac{\frac{\pi t}{4}}{\sin\frac{\pi t}{4}}=-\frac{4}{\pi}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}}{4\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}}{2\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Обчислити границі функцій, використовуючи другу важливу границю.

3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\{1^{\infty}\}$.Для розв'язання скористаємося формулою:

Нехай потрібно обчислити границю $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}$, де $u(x)\to1, v(x)\to\infty, при\ \ x\to x_0$, тоді

$\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left((1+(u(x)-1))^{\frac{1}{u(x)-1}}\right)^{(u(x)-1)v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)}=e^A$

Позначимо ,в нашому випадку, $u(x)=\frac{\cos x}{\cos2x}$, $v(x)=\frac{1}{x^2}$, $u(x)\to1, v(x)\to\infty$, $x\to0$, тоді

$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos2x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x-\cos2x}{x^2\cos2x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2\cos2x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos2x}=\frac{3}{2}$,отже $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{3}{2}}=\sqrt{e^3}$

Обчислити границі функції, використовуючи наслідки з другої важливої границі.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-4^{-x}}{2^{\sin x}-1}=\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4^x-1)-(4^{-x}-1)}{\dfrac{2^{\sin x}-1}{\sin x}\sin x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4^x-1)-(4^{-x}-1)}{\ln 2\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{4^x-1}{x}+\dfrac{4^{-x}-1}{-x}}{\ln 2\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{\ln 4+\ln 4}{\ln 2}=4;$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x+1)-\ln x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\dfrac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\dfrac{1}{x})=\{\infty\cdot 0\}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=$

$=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\ln e=1;$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\log_{\cos x}(1+x^2)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln\cos 2x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-2\sin^2 x)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}x^2}{\dfrac{\ln(1-2\sin^2 x)}{-2\sin^2 x}(-2\sin^2 x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{-2\sin^2 x}=-\dfrac{1}{2};$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\arcsin 3x}=\left\{\begin{matrix}\sin 5x\approx 5x, x\to 0\\ \arcsin 3x\approx 3x, x\to 0\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3x}=\dfrac{5}{3};$

1.Обчислити границю функцій:

1.1 а) $\lim\limits_{x\to -3/5}\dfrac{5x^2+8x+3}{5x^2-7x-6}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+3}}{x^2+2x-8}$

1.2 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{2x+9}}{4x^2-3x}$

1.3 а) $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{2x^2-3x-2}{8x^3+1}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{5x-1}}{x^2+x-2}$

1.4 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-2x-3}$ б) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\sqrt{12x^2-1}-\sqrt{4x^2+1}}{2x-1}$

1.5 а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3x^2+11x-4}{x^2+21x+68}$ б) $\lim\limits_{x\to -2/3}\dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{6x+6}}{9x^2-4}$

1.6 а) $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{2x^2-3x-2}{8x^3+1}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{5x-1}}{x^2+x-2}$

1.7 а) $\lim\limits_{x\to 3/2}\dfrac{2x^2-x-3}{8x^2-10x-3}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{4x+1}}{x^2+3x-10}$

1.8 а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+5x+3}{4x^2+3x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to -1/4}\dfrac{16x^2-1}{\sqrt{12x+4}-\sqrt{4x+2}}$

1.9 а) $\lim\limits_{x\to 2/3}\dfrac{6x^2-x-2}{3x^2+x-2}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{10x-1}-\sqrt{5x+4}}{2x^2+x-3}$

1.10 а) $\lim\limits_{x\to 5/2}\dfrac{4x^2-4x-15}{2x^2-7x+5}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5x-1}}{x^3-1}$

1.11 а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{3x^2+10x-8}$ б) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{2x+3}}{2x+3x-2}$

1.12 а) $\lim\limits_{x\to 1/5}\dfrac{5x^2-11x+2}{10x^2+3x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-4}-\sqrt{4-x}}{2x^2-3x-2}$

Питання для підготовки до практичного заняття:

Методи обчислення границь

Перша важлива границя

Друга важлива границя

Домашнє завдання:

[3], с. 178…206

[6], с. 208

[2], с. 46

[1], с 169

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема	Показникова форма комплексного числа
Мета	сформувати у студентів практичні навички при знаходженні суми, різниці, множенні та діленні комплексних чисел, заданих в алгебраїчній, тригонометричній та показникової формах; вміння переходити від однієї форми комплексного числа до іншої.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4] с. 67…69	10хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу*

Література

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали

Показникова форма комплексного числа

Скористаємося формулою Ейлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, тоді комплексне число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ матиме такий вигляд $z = re^{i\varphi}$ - така форма запису комплексного числа називається *показниковою*.

(За формулою Ейлера $e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$, якщо $x = 0$, то $e^{ib} = \cos b + i\sin b$).
Так як функції $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$ мають період $2\pi k$, $k = \pm1, \pm2, \ldots$, то і показникова функція $e^{i\varphi}$ теж має період $2\pi i$.
Дії над комплексними числами $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ і $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ в показниковій формі :
1. Добуток $z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_1 e^{i\varphi_1} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
2. Ділення

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

3.Піднесення до степеня

$$(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$$

4.Здобуття кореня n–го степеня

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}} \quad (k = 0,1,2,..n-1)$$

За допомогою формул Ейлера можна переходити із тригонометричної форми в показникову і навпаки

Приклади розв'язання типових задач

1. Записати комплексні числа в показниковій формі :

а) $z = 2i$.

Розв'язання: за умовою $a = 0$ і $b = 2$, тоді $r = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$ і

$\varphi = arctg\frac{2}{0} = \frac{\pi}{2}$ і за формулою $z = re^{i\varphi}$ отримаємо $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$;

б) $z = -1 + i$.

Розв'язання: за умовою $a = -1$ і $b = 1$,тоді $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

і $\varphi = arctg\frac{1}{-1} = \frac{3\pi}{4}$ і отримаємо $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

2. Записати комплексні числа в алгебраїчній формі:

а) $e^{\frac{i\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $e^{2+i\pi} = e^2(\cos\pi + i\sin\pi) = e^2((-1) + i\cdot 0) = -e^2$.

3. Для комплексних чисел $z_1 = 1 + i$ і $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ обчислити

1) $z_1 \cdot z_2$; 2) $z_1 : z_2$; 3) z_1^6 ; 4) $\sqrt[4]{z_1}$.

Розв'язання: 1) спочатку запишемо комплексні числа в показниковій формі

Для числа $z_1 = 1 + i$ $a = 1$, $b = 1, r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = arctg1 = \frac{\pi}{4}$,тоді

$z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$,для числа $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$,

$\varphi = arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, тоді $z_2 = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$,таким чином

$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot 2e^{-\frac{i\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+(-\frac{\pi}{3}))} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$;

2) $z_1 : z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} : 2e^{-\frac{i\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{3}))} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$;

3) $z_1^6 = (\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}})^6 = 8e^{i\frac{3\pi}{2}}$;

4) $z_k = \sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{(\frac{\pi}{4}+2\pi\kappa)}{4}}, \kappa = 0,1,2,3$

$\kappa = 0$,то $z_0 = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{16}}$, $\kappa = 1$,то $z_1 = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{(\frac{\pi}{4}+2\pi)}{4}} = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{9\pi}{16}}$;

$\kappa = 2$,то $z_2 = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{(\frac{\pi}{4}+4\pi)}{4}} = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{17\pi}{16}}$, $\kappa = 3$ $z_3 = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{(\frac{\pi}{4}+6\pi)}{4}} = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{25\pi}{16}}$

Розв'язати завдання

1. Записати у тригонометричній формі наступні комплексні числа:

1) $z = 4$, 2) $z = -3$, 3) $z = 5i$, 4) $z = -7i$, 5) $z = -1 + i$, 6) $z = \sqrt{3} - i$,

7) $z = -2 - 2i$, 8) $z = -3 + 4i$, 9) $z = 2 + 2i\sqrt{3}$, 10) $z = -5 + i$,

11) $z = 7{,}2 + 5{,}1i$, 12) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$.

2. Записати в алгебраїчній формі:

1) $z = 3(\cos 0 + i\sin 0)$, 2) $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$, 3) $z = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$,

4) $z = 4(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$,5) $z = \cos\pi + i\sin\pi$,6) $z = \sqrt{3}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$

7) $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$, 8) $z = 6(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9})$, 9) $z = \cos 24 + i\sin 24$,

10) $z = 5(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

3. Знайти добуток : 1) $(\cos 10 + i\sin 10)\cdot 3(\cos 35 + i\sin 35)$,

2) $2(\cos 130 + i\sin 130)\cdot 4(\cos 140 + i\sin 140)$, 3) $2(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})\cdot(\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24})$,

4) $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\cdot 5(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$, 5) $(\cos 5 + i\sin 5)(\cos 2 + i\sin 2)$,

6) $(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})\cdot(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$,7) $(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})\cdot(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$,

8) $3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\cdot\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$, 9) $0(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})\cdot\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12}))$

10) $5(\cos 120 + i\sin 12)\cdot(\cos 80 + i\sin 80)\cdot 4(\cos 70 + i\sin 70)$

4. Виконати ділення з комплексними числами із завдання №3

5. Піднести до степеня :

1) $(6(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}))^4$,2) $(2(\cos 20 + i\sin 20))^{12}$,3) $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)^{100}$,4) $(\sqrt{3} + i)^{50}$,

5) $(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})^8$, 6) $(-2 - 3i)^5$, 7) $(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i)^{10}$, 8) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$,9) $\frac{1}{(\cos 9 + i\sin 9)^5}$,

10) $(1 + i\sqrt{3})^3(1 - i)^7$.

6. Обчислити корінь з комплексного числа:

1) $\sqrt[3]{-1}$, 2) $\sqrt[4]{4}$, 3) $\sqrt[4]{-2 + 2i\sqrt{3}}$, 4) $\sqrt[3]{-3 - 3i}$, 5) $\sqrt[5]{3 + \sqrt{3}i}$, 6) $\sqrt[6]{1 + i}$, 7) $\sqrt[4]{2i}$, 8) $\sqrt[4]{-3i}$,9) $\sqrt[3]{5 - 5i}$,10) $\sqrt[3]{\cos 30 + i\sin 30}$

7. Записати комплексні числа в показниковій формі :

1) $z = 4$, 2) $z = -3$, 3) $z = 5i$, 4) $z = -7i$, 5) $z = -1 + i$, 6) $z = \sqrt{3} - i$,

7) $z = -2 - 2i$, 8) $z = -3 + 4i$, 9) $z = 2 + 2i\sqrt{3}$, 10) $z = -5 + i$,

11) $z = 7{,}2 + 5{,}1i$, 12) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$.

8. Записати комплексні числа в алгебраїчній і тригонометричній формах :

1) $3e^{\frac{2i\pi}{3}}$, 2) $4e^{-\frac{i\pi}{4}}$, 3) e^{i}, 4) $e^{0\cdot i}$, 5) $2e^{\frac{i\pi}{2}}$,6) $5e^{\frac{i\pi}{2}}$,7) $\sqrt{2}e^{i\pi}$,8) $3e^{i\cdot 2\pi}$,9) $6e^{1,5i}$ 10) $14e^{-\frac{i17\pi}{90}}$

9. Для даних пар комплексних чисел обчислити

a) $z_1 \cdot z_2$; b) $\frac{z_1}{z_2}$; c) $\frac{z_2}{z_1}$; d) z_1^6; e) z_2^4; f) $\sqrt[4]{z_1}$:

1) $z_1 = -1+i$ і $z_2 = 1+i\sqrt{3}$; 2) $z_1 = -\sqrt{3}+i$ і $z_2 = 1-i$;

3) $z_1 = 1$ і $z_2 = -i$; 4) $z_1 = i$ і $z_2 = -\sqrt{3}-i\sqrt{3}$;

5) $z_1 = -5-5i$ і $z_2 = \sqrt{3}+i$.

10. Виконати дії і результат записати в показниковій, тригонометричній і алгебраїчній формах:

1) $2e^{i\frac{7\pi}{8}} \cdot 3e^{i\frac{11\pi}{18}}$, 2) $e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot 4e^{i\frac{\pi}{12}}$, 3) $6e^{i} : (3e^{-i})$,

4) $4e^{i\frac{5\pi}{9}} : (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{9}})$, 5) $(\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{9}})^3$, 6) $(2e^{i\frac{7\pi}{9}})^{10}$.

Домашнє завдання:

[4] с. 67…69

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема	Однорідні рівняння.
Мета	сформувати у студентів уявлення про однорідні рівняння; формувати вміння знаходити загальний і частинний розв'язки однорідного рівняння.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4] с. 209…211 [6] с. 443-446	10хв	Включає в себе: *узагальнення*, *теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

Навчальні матеріали

Приклади:

1. Розв'яжіть рівняння:

$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2}.$$

Розв'язання: Права частина рівняння є однорідною функцією нульового виміру. Отже, дане рівняння є однорідним.

Нехай $y = tx$, тоді $y' = t'x + t$. Підставивши ці значення у вихідне рівняння, матимемо:

$$t'x + t = \frac{t^2x^2}{x^2t - x^2}, \quad t'x + t = \frac{t^2}{t-1}, \quad x\frac{dt}{dx} = \frac{t}{t-1},$$
$$\int \frac{t-1}{t}\,dt = \int \frac{dx}{x}, \quad t - ln|t| = ln|x| + ln\mathrm{C}, \quad t = ln|\mathrm{C}xt|.$$

Замінивши змінну t на $\frac{y}{x}$, дістанемо загальний інтеграл вихідного рівняння:

$y = x\ ln|\mathrm{C}y|$.

2. Знайдіть загальний розв'язок рівняння $y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}$.

Розв'язання:

Дане рівняння зведемо до однорідного. Знайдемо визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то зробимо заміну $x = t + \alpha$, $y = v + \beta$.

Для визначення коефіцієнтів α і β складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - 3 = 0 \\ 2\alpha - 2 = 0 \end{cases},$$

Її розв'язок - $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Отже,

$$x = t + 1, \quad y = v + 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d(v+1)}{d(t+1)} = \frac{dv}{dt}.$$

Вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{t+1+2v+2-3}{2t+2-2}, \quad \text{або} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{t+2v}{2t}.$$

Одержане рівняння є однорідним рівнянням. Розв'яжемо його.

$$v = ut, \quad u = u(t), \quad v' = u't + u.$$

Тоді

$$u't + u = \frac{t+2ut}{2t}; \quad u't + u = \frac{1+2u}{2}; \quad u't = \frac{1}{2}; \quad 2\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}; \quad 2du = \frac{dt}{t}.$$

З останнього рівняння знайдемо

$$u = \frac{1}{2}\ ln|\mathrm{C}t|, \quad \text{або} \quad v = \frac{1}{2}t\ ln|\mathrm{C}t|.$$

Повернувшись до змінних x та y, дістанемо

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x-1)\ ln|\mathrm{C}(x-1)|, \quad \text{або} \quad y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)\ ln|\mathrm{C}(x-1)|.$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$(2x + 4y + 3)dy - (x + 2y + 1)dx = 0.$$

Розв'язання: Запишемо дане рівняння у вигляді:

$$y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}.$$

Визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Тому покладемо $z = x + 2y$. Далі маємо:

$\frac{dz}{dx} = 1 + 2\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx} - 1\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = \frac{z+1}{2z+3}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{4z+5}{2z+3}$, $\frac{2z+3}{4z+5}dz = dx$,

$\int\left(1 + \frac{1}{4z+5}\right)dz = 2\int dx$, $z + \frac{1}{4}\ln|4z+5| = 2x + C/4$, $4z + \ln|4z+5| = 8x + C$,

$\ln|4x + 8y + 5| = 4x - 8y + C$ - загальний інтеграл вихідного рівняння.

Завдання.

Знайти загальний розв'язок рівнянь:

1) $(x + 2y)dx - xdy = 0$

2) $y^2 + x^2y' = xyy'$

3) $(x + y)dx - xdy = 0$

4) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$

5) $y' = 1 + \frac{y}{x}$

6) $xy' = 3y - x$

Питання для підготовки до практичного заняття:

1. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

2. Рівняння з відокремлюючимися змінними

3. Знаходження інтегралів різними методами

Домашнє завдання:

[4] с. 209-211

[6] с. 443-446

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема	Похідна неявної функції
Мета	ознайомити студентів з поняттям неявної функції; формувати
	вміння знаходити похідну неявної функції

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3] с. 223 [1] с. 215	10хв	Включає в себе: *узагальнення*, *теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали

Похідна неявної функції

Нехай значення двох змінних x і y зв'язані між собою деяким рівнянням, яке символічно записується так: $F(x,y)=0$ (1)

Якщо функція $y=f(x)$, яка визначена на інтервалі $(a;b)$, така ,що рівняння (1) при підстановці у нього замість y вираз $f(x)$ обертає його на тотожність відносно x, то функція $y=f(x)$ є *уявною функцією*, яка визначена рівнянням (1).

Так, наприклад, рівняння

$$x^2+y^2-a^2=0 \quad (2)$$

уявно визначає наступні елементарні функції

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2} \quad (3)$$

Дійсно, після підстановки в рівняння (2) отримаємо тотожність

$$x^2+(a^2-x^2)-a^2=0$$

Вираз (3) отримали шляхом розв'язання рівняння (2) відносно y. Але не будь-яку уявно задану функцію можна подати явно, тобто можна подати у вигляді $y=f(x)$, де $f(x)$ є елементарною функцією.

Так, наприклад,функції, які задані рівняннями

$$y^6-y-x^2=0$$

або

$$y-x-\frac{1}{4}siny=0,$$

не можна виразити через елементарні функції, тобто ці рівняння неможливо розв'язати відносно y.

Розглянемо правило обчислення похідної уявної функції.

Припустимо, що функція задана рівнянням: $x^2+y^2-a^2=0$

Якщо в цьому рівнянні y є функцією від x, яка визначається цим рівнянням, то ця рівність є тотожністю.

Диференціюючи обидві частини цієї тотожності по x, отримаємо (користуючись правилом диференціювання складеної функції):

$$2x+2yy'=0$$

звідки

$$y'=-\frac{x}{y}.$$

Зауважимо, що якщо б ми почали диференціювати відповідну явну функцію

$$y=\sqrt{a^2-x^2},$$

то отримали б:

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{y},$$

тобто той же результат.

Розглянемо ще один приклад уявної функції: $y^6-y-x^2=0$. Диференціюємо по x: $6y^5y'-y'-2x=0$, звідки $y'=\frac{2x}{6y^5-1}$.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Що означає неявна функція?
2. Як знайти похідну неявної функції?
3. Назвіть правила диференціювання.
4. Дайте означення диференційованої функції.
5. Назвіть формули та правила диференціювання.

Домашнє завдання:

[3] с. 223

[1] с. 215

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема	Похідна функції, заданої параметрично
Мета	ознайомити студентів з поняттям функції, заданої параметрично ;
	формувати вміння знаходити похідну цієї функції

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3] с. 223…224 [1] с. 214	10хв	Включає в себе: *узагальнення*, *теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали

Похідна функції, заданої параметрично

Нехай функція y від x задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{cases}$$

Положимо, що ці функції мають похідні і що $x = \varphi_1(t)$ має обернену $t = \phi(x)$, яка також має похідну. Тоді визначену параметричними рівняннями функцію $y = f(x)$ можна розглядати як складену функцію:

$$y = \varphi_2(t), \quad t = \phi(x).$$

За правилом диференціювання складеної функції отримаємо:

$$y'_x = y'_t t'_x = \varphi'_2(t)\phi'_x(x) \qquad (1)$$

На підставі теореми про диференційованість оберненої функції маємо:

$$\phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Підставивши останній вираз у рівність (1), отримаємо:

$$y'_x = \frac{\varphi'_2(t)}{\varphi'_1(t)} \qquad \text{або} \qquad \boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$$

Приклад:

Функція y від x задана параметричними рівняннями:

$$x = acost, \; y = asint,$$

Обчислити похідну y'_x.

Розв'язування: $y'_x = \frac{(asint)'}{(acost)'} = \frac{acost}{-asint} = -ctgt.$

Похідна показниково-степеневої функції

У деяких випадках при відшуканні похідної доцільно задану функцію спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідну як від неявної функції. Така операція називається логарифмічним диференціюванням.

Нехай $u(x), v(x)$ - диференційовані функції від x і необхідно обчислити похідну функції $y = u(x)^{v(x)}$. Для цього прологарифмуємо цю функцію

$\ln y = \ln(u^v)$, далі продиференціюємо

$(\ln y)' = (v \ln u)'$, звідси

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u'$$

$$y' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{1}{u} u'\right) = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'$$

Похідні вищих порядків

Похідна $y' = f'(x)$ від функції $y = f(x)$ називається *похідною першого порядку* і являє собою деяку нову функцію. Можливі випадки, коли ця функція сама має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку $(y')'$ називається похідною *другого порядку від функції* $y = f(x)$ і позначається y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Похідна від похідної другого порядку $(y'')'$ називається *похідною третього порядку* і означається y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3x}{dx^3}$.

Похідна від похідної $(n-1)$-го порядку $\left(y^{(n-1)}\right)'$ називається *похідною n-го порядку* і позначається $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Таким чином, $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$, $n = 1, 2, \ldots$

Приклад. Знайти похідну третього порядку для функції $y = \sin(5x+4)$.

$y' = 5\cos(5x+4)$; $y'' = -25\sin(5x+4)$; $y''' = -125\cos(5x+4)$.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення функції, заданої параметрично.
2. Як виглядає показниково - степенева функція?
3. Назвіть правила обчислення похідних вищих порядків.
4. Назвіть правила обчислення похідної показниково - степеневої функції.
5. Назвіть формули та правила диференціювання.

Домашнє завдання:

[3] с. 223…224

[1] с. 214

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема Інтервали монотонності функції

Мета ознайомити студентів з поняттям критичної точки, признаками зростання, спадання, сталості функції на проміжку, сформувати вміння використовувати ці признаки при розв'язуванні завдань

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3] с. 272…273 [1] с. 246	10хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.
1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали

Проміжки монотонності функції

Функція $f(x)$ називається зростаючою(спадною) на інтервалі $(a;b)$, якщо для довільних двох точок x_1 і x_2 із інтервалу $(a;b)$ таких, що $x_1 < x_2$,виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Теорема*(достатня умова зростання (спадання) функції)*

Нехай функція $f(x)$ диференційована на інтервалі $(a;b)$. Тоді

1) якщо $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то функція $f(x)$ зростає на $(a;b)$

2) якщо $f'(x) < 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то функція $f(x)$ спадає на $(a;b)$

3) якщо $f'(x) = 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то функція $f(x)$ стала на $(a;b)$.

Теорема*(необхідна умова зростання(спадання) функції)*

Якщо диференційована на інтервалі $(a;b)$ функція зростає (спадає), то $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ для всіх $x \in (a;b)$.

Точка x_0 називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0 < |x - x_0| < \delta$ точки x_0 , який належить області визначення функції, і для всіх x з цього околу виконується нерівність

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

Точки локального максимуму і локального мінімуму називається точками локального екстремуму , а значення функції у цих точках називається відповідно локальним максимумом і локальним мінімумом або локальним екстремумом.

Теорема1*(необхідна умова локального екстремуму)*

Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційована в цій точці, то $f'(x_0) = 0$

Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називаються стаціонарними. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються критичними. Критичні точки – це точки можливого екстремуму.

Теорема 2 *(перша достатня умова локального екстремуму)*

Нехай x_0 - критична точка функції $f(x)$, яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл $(x_0 - \delta\,; x_0 + \delta)$ точки x_0, в якому функція має похідну. Тоді 1) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta\,; x_0)$ похідна $f'(x) > 0$, а в інтервалі $(x_0\,; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) < 0$, то точка x_0 - локальний максимум функції;

2) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta\,; x_0)$ похідна $f'(x) < 0$, а в інтервалі $(x_0\,; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) > 0$, то точка x_0 - локальний мінімум функції ;

3) якщо в обох інтервалах $(x_0 - \delta\,; x_0)$ і $(x_0\,; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак, то точка x_0 не є екстремальною точкою функції $f(x)$.

Теорема 3 *(друга достатня умова локального екстремуму)*

Нехай x_0 - стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$, і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна , причому $f''(x_0) \neq 0$.Якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка локального мінімуму, якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка локального максимуму.

Правило дослідження функції на екстремум:

1)знайти критичні точки функції $f(x)$. Для цього слід розв'я зати рівняння $f'(x)=0$ і серед його розв'язків вибрати тільки ті корені , які є внутрішніми точками області існування функції, знайти точки в яких похідна існує;

2)якщо критичні точки є, то треба дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область існування цими критичними точками. Для цього достатньо визначити знак похідної в якій-небудь одній точці інтервалу, оскільки похідна може змінити знак лише переходячи через критичну точку;

3) за зміною знака $f'(x)$ при переході через критичні точки зліва направо визначити точки максимумів та мінімумів і обчислити значення функції $f(x)$ в цих точках .

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення критичної точки.
2. Назвіть признак зростання, спадання функції.
3. Назвіть признак сталості функції.
4. Назвіть достатню умову локального екстремуму.
5. Назвіть необхідну умову локального екстремуму.

Домашнє завдання:

[3] с. 272…273

[1] с. 246

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема Екстремум функції

Мета ознайомити студентів з поняттям точки максимуму та мінімуму, необхідною умовою екстремуму функції, сформувати вміння знаходити точки екстремуму для дослідження функції

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3] с. 273…276 [1] с. 248	10хв	Включає в себе: *узагальнення, теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.
1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали

Знайомлячись з такими поняттями як границя і неперервність функції в точці, ми досліджували поведінку функції поблизу цієї точки або, як прийнято говорити, в її околі.

Означення 1.

Інтервал $(a;b)$, який містить точку x_0, називають *околом* точки x_0.

Зрозуміло, що будь-яка точка має безліч околів. Наприклад, проміжок $(-1;3)$ - один з околів точки 2,5. Разом з тим цей проміжок не є околом точки 3.

На рисунку 1 зображено графіки чотирьох функцій. Усі ці функції мають спільну особливість: існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$.

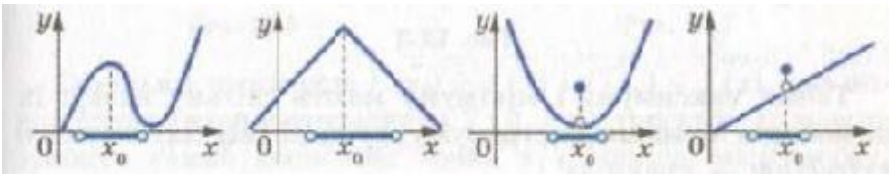


Рис.1

Означення 2.

Точку x_0 називають *точкою максимуму* функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$.

Наприклад, точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ є точкою максимуму функції $y = \sin x$ (рис.2). Пишуть $x_{\max} = \frac{\pi}{2}$.

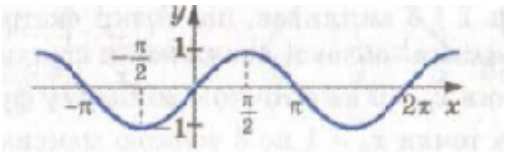


Рис.2

На рис. 1 $x_{\max} = x_0$.

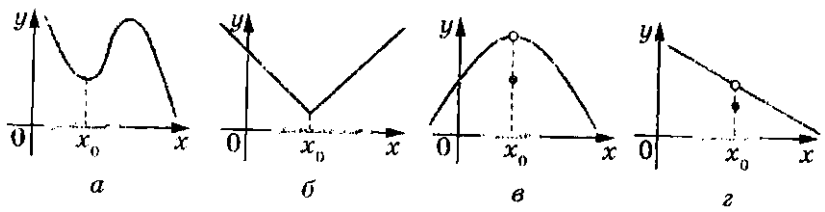
Означення 3.

Точку x_0 називають точкою мінімуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x з цього околу виконується нерівність

$f(x_0) \leq f(x)$.

Наприклад, точка $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ є точкою мінімуму функції $y = \sin x$ (рис. 9.2). Пишуть $x_{min} = -\frac{\pi}{2}$.

На рисунку 3 зображено графіки функцій, для яких x_0 є точкою мінімуму, тобто $x_{min} = x_0$.



а *б* *в* *г*

Рис. 3

Точки максимуму і мінімуму мають спільну назву: їх називають точками екстремуму функції (від латинського $extremum$ — крайній).

На рисунку 4 точки $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ є точками екстремуму.

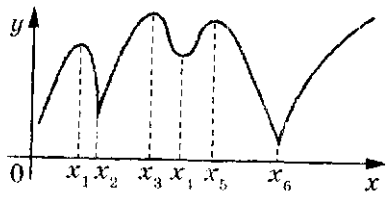


Рис. 4

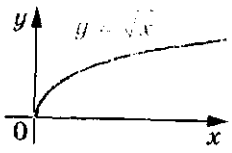


Рис. 5

З означень 2 і 3 випливає, що точки екстремуму є внутрішніми точками області визначення функції. Тому, наприклад, точка $x_0 = 0$ не є точкою мінімуму функції $y = \sqrt{x}$ (рис. 5), а точка $x_0 = 1$ не є точкою максимуму функції $y = arcsinx$(рис. 6). Разом з тим найменше значення функції $y = \sqrt{x}$ на множині [0; +co) дорівнює нулю, тобто

$$\min_{[0;+\infty)} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0, \text{ а}$$

$$\max_{[-1;1]} arcsinx = arcsin1 = \frac{\pi}{2}$$

На рисунку 7 зображено графік деякої функції f, яка на проміжку $[x_1; x_2]$ є константою.

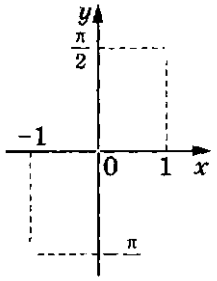


Рис.6

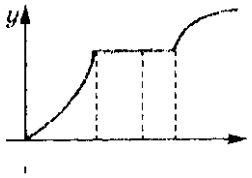
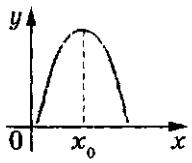


Рис.7

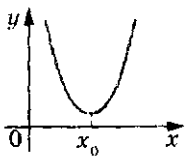
Оскільки нерівності

$\boldsymbol{f(x_0) \geq f(x)}$ і $\boldsymbol{f(x_0) \leq f(x)}$, які використовуються в означеннях 2 і 3, є нестрогими, то можна зробити такий висновок: точка x_1 є точкою максимуму, точка x_2 — мінімуму, а будь-яка точка інтервалу $(x_1; x_2)$ є одночасно як точкою максимуму, так і точкою мінімуму функції f.

Графіки функцій, зображених на рисунках 8 і 9, показують, що точки екстремуму можна поділити на два види: ті, у яких похідна дорівнює нулю (на рис. 8 дотична до графіка в точці з абсцисою x_0 є горизонтальною прямою), і ті, у яких функція недиференційовна (рис. 9).

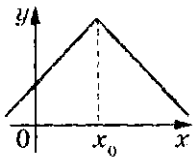


а

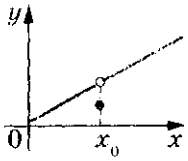


б

Рис.8.



а



б

Рис.9.

Дійсно, справедливою є така теорема

Теорема 1.

Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f, ***то або*** $f'(x_0) = 0$, ***або функція*** f ***не є диференційовною в точці*** x_0.

Виникає природне запитання: чи обов'язково є точкою екстремуму внутрішня точка області визначення функції, у якій похідна дорівнює нулю або не існує?

Відповідь на це запитання заперечна.

Наприклад, на рисунку 9.10 зображено графік функції, недиференційовної в точці x_0. Проте точка x_0 не є точкою екстремуму.

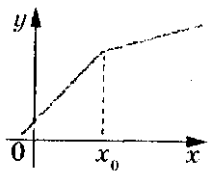


Рис. 10

Наведемо ще один приклад. Для функції $f(x) = x^3$ маємо: $f'(x) = 3x^2$ Тоді $f'(0) = 0$. Проте точка $x_0 = 0$ не є точкою екстремуму функції f.

Ці приклади показують, що теорема 1 дає необхідну, але не достатню умову існування екстремуму в даній точці.

Означення 4.

Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками функції.

Наприклад, точка $x_0 = 0$ є критичною точкою функцій $y = x^3$ і $y = |x|$; точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ є критичною точкою функції $y = sinx$.

Із сказаного вище випливає, що *кожна точка екстремуму функції є її критичною точкою, проте не. кожна критична точка є точкою екстремуму.* Іншими словами, *точки екстремуму слід шукати серед критичних точок.* Цей факт проілюстровано на рисунку 12.

Рис. 12

На рисунку 13 зображено графіки функцій, для яких x_0 є критичною точкою.

На рисунках 13, *а, б, в, г* критична точка x_0 є точкою екстремуму, на рисунках 13, *ґ, д* критична точка x_0 не є точкою екстремуму.

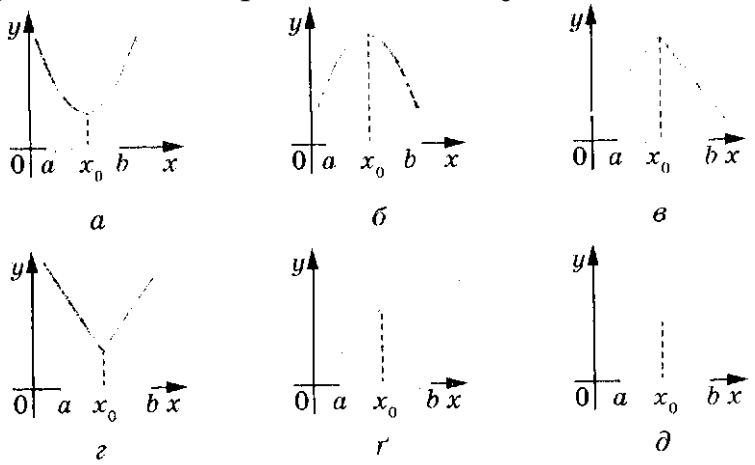
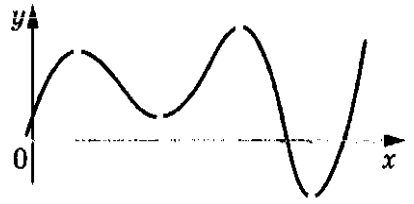


Рис.13

Наявність екстремуму функції в точці x_0 пов'язана з поведінкою функції в околі цієї точки. Так, для функцій, графіки яких зображено на рисунках 13, *а-г,* маємо: функція зростає (спадає) на проміжку $(a; x_0]$ і спадає (зростає) на проміжку $[x_0; b)$.

Функції, графіки яких зображено на рисунках 13, ***ґ, д,*** такої властивості не мають: перша з них зростає на кожному з проміжків $(a; x_0]$ і $[x_0; b)$, друга — спадає на цих проміжках.

Узагалі, якщо область визначення неперервної функції розбито на скінченну



кількість проміжків зростання і спадання, то легко знайти всі точки екстремумів (рис. 14).

Ви знаєте, що за допомогою похідної можна знаходити проміжки зростання (спадання) диференційовної функції. Дві теореми, наведені нижче, показують, як за допомогою похідної можна знаходити точки екстремуму функції.

Теорема 2. (ознака точки максимуму функції)

Нехай функція f *є диференційовною на інтервалі* (a; b) *і* x_0 *— деяка точка цього інтервалу. Якщо для всіх* x ∈ (a; x_0] *виконується нерівність* $f'(x_0) \geq 0$, *а для всіх* x ∈ (x_0; b] *виконується нерівність* $f'(x_0) \leq 0$, *то точка* x_0 *є точкою максимуму функції* f (рис. 13, а).

Теорема 3. (ознака точки мінімуму функції)

Нехай функція f *є диференційовною на інтервалі* (a; b) *і* x_0 *— деяка точка цього інтервалу. Якщо для всіх* x ∈ (a; x_0] *виконується нерівність* $f'(x_0) \leq 0$, *а для всіх* x ∈ (x_0; b] *виконується нерівність* $f'(x_0) \geq 0$, *то точка* x_0 *є точкою максимуму функції* f (рис. 13, б).

Приклад 1.

Знайдіть точки екстемуму функції:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$;

2) $f(x) = 2x^2 - x^4$;

3) $f(x) = \frac{x^2-x+4}{x-1}$;

4) $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання.

1) Маємо $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12 = 2(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2)$. Методом інтервалів дослідимо знак похідної в колах критичних точок $x_1 = -1, x_2 = 2$. Отримуємо,що $x_{max} = -1, x_{min} = 2$.

2) $f(x) = 4x - 4x^3 = -4x(x^2 - 1) = -4x(x + 1)(x - 1)$.

Дослідивши знак похідної отримуємо:

$$x_{max} = -1, x_{min} = 0 \; i \; x_{max} = 1.$$

3) Маємо:

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 4)(x - 1) = (x - 1)(x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} = \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}.$$

Дослідимо похідної в околах критичних точок $x_1 = -1, x_2 = 3$. Маємо, що $x_{max} = -1, x_{min} = 3$.

4) Маємо: $f(x)\frac{(x+2)^4 \bullet \sqrt{x} - (\sqrt{x}) + (x+2)}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+2)}{x} = \frac{2x-(x+2)}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-2}{2x\sqrt{x}}$.

Якщо $0 < x < 2$,то $f(x) < 0$;якщо $x > 2, mo\ f(x) > 0$. Отже, критична точка $x = 2$ є точкою мінімуму, тобто $x_{min} = 2$.

Приклад 2.

Знайдіть точки екстремуму функції:

$$f(x) = sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}cos\frac{x}{2} - \frac{x-3}{2}.$$

Розв'язання.

Маємо:

$$f(x) = \frac{1}{2}cos\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2},$$

Знайдемо критичні точки даної функції:

$cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} = 0;$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \epsilon Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4\pi k, \\ x = \frac{4\pi}{3} + 4\pi k, k \epsilon Z \end{cases}$$

Функція $f(x) = \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$ є періодичною з періодом $T = 4\pi$. Методом інтервалів дослідимо її знак на проміжку $[-2\pi; 2\pi]$завдовжки в період. Цьому проміжку належать дві критичні точки: $x = 0\ i\ x = -\frac{4x}{3}$.

Дослідемо знака похідної на проміжку$[-2\pi; 2\pi]$.Тепер можна зробити висновок: $x_{max} = 0, x_{min} = -\frac{4x}{3}$.

Узагальнюючи отриманий результат, дістаємо відповідь:

$x_{max} = 4\pi k, x_{min} = -\frac{4x}{3} + 4\pi k, k \in Z.$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення точки мінімуму.
2. Дайте означення точки максимуму.
3. Назвіть необхідну умову екстремуму.
4. Як знайти екстремум функції?
5. Дайте означення критичної точки.

Домашнє завдання: [1], с. 248, [3], с.273-276

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема Дослідження функції за допомогою другої похідної

Мета ознайомити студентів з поняттям точки максимуму та мінімуму, необхідною умовою екстремуму функції, сформувати вміння знаходити точки екстремуму для дослідження функції

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1] с. 260	10хв	Включає в себе: *узагальнення*, *теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали

Нехай матеріальна точка рухається законом $y = s(t)$ по координатній прямій. Тоді миттєва швидкість $u(t)$ у момент часу t визначається за формулою

$u(t) = s'(t)$.

Розглянемо функцію $a\ (t) = u'(t)$. Її похідну в момент часу t називають прискоренням руху і позначають a (f), тобто

$$a(t) = u'(t).$$

Таким чином, функція прискорення руху – це похідна функції швидкості руху, яка у свою чергу є похідною функції закон руху, тобто

$a(t) = u'(t) = \left(s'(t)\right)'$.

У таких випадках говорять, що функція прискорення руху $y = a(t)$ є **другою похідною функції** $y = s(t)$. Пишуть:

$$a(t) = s''(t)$$

(запис $s''(t)$ читають: «ес два штрихи від те»).

Ми отримали, що матеріальна точка рухається зі сталим прискоренням. Як ви знаєте з курсу фізики, такий рух деякій множині М. Тоді її похідна також є деякою функцією, заданою на цій множині. Якщо функція f' є диференційованою у деяких точках $x_0 \epsilon M$, то похідну функції f' у точці $\boldsymbol{x_0}$ **називають другою похідною функції** $\boldsymbol{y = f(x)}$ **у точці** $\boldsymbol{x_0}$ і позначають $f''(x_0)$ або $y''(x_0)$. Саму функцію *f* називають **двічі диференційованою в точці** $\boldsymbol{x_0}$**.**

Функцію, яка числу x_0 становить у відповідність число $f''(x_0)$, називають **другою похідною функції** $y = f(x)$ і позначають f'' або y''.

Наприклад, якщо $y = \sin x$, то $y'' = -\sin x$.

Якщо функція *f* є двічі диференційована на D(*f*), то її називають **двічі диференційованою.**

Ви знаєте, що функцію характеризують таки властивості як парність (непарність), періодичність, зростання (спадання) тощо. Ще однією важливою характеристикою функції є опуклість угору або вниз.

Нехай функція *f* диференційована на проміжку *I*. Тоді в будь-якій точці її графіка з абсцисою $x \in I$ можна провести невертикальну дотичну. Якщо при цьому графік функції на проміжку *I* розміщений не вище будь-якої такої дотичної то функцію *f* називають опуклою вгору на **проміжку *I***; якщо ж графік на проміжку *I* розміщений не нижче будь-якої такої дотичної – то опуклою **вниз на проміжку *I***.

Збільшенням аргументу *x* кут нахилу відповідної дотичної збільшується. Це означає, що функція f' зростає на проміжку [a; b].

Нехай функція f' є опуклою вгору на проміжку[a; b]. З рисунка видно, що зі збільшенням аргументу *x* кут нахилу відповідної дотичної зменшується. Це означає, що функція f' спадає на проміжку [a; b].

Ці приклади показують, що характер опуклості функції *f* на деякому проміжку *I* пов'язаний зі зростанням (спаданням) функція f' на цьому проміжку.

Для двічі диференційованого на проміжку *I* функції *f* зростання (спадання) функції f' визначається знаком другої похідної функції *f*на проміжку *I*. Таким чином, характер опуклості двічі диференційованої функції пов'язаний зі знаком її другої похідної.

Цей зв'язок установлюють такі теореми.

Теорема 1 (ознака опуклості функції вниз).

Якщо для всіх x є I виконується нерівність $f'(x) > 0$***, то функцією f є опуклою вниз на проміжку I.***

Теорема 2 (ознака опуклості функції вгору).

Якщо для всіх x є I виконується нерівність $f'(x) < 0$***, то функція f є опуклою вгору на проміжку I.***

Приклад 1.

Дослідіть на опуклість функцію $f(x) = tgx$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = \frac{1}{cos^2 x}$. Звідси

$$f''(x) = \left(\frac{1}{cos^2 x}\right)' = (cos^{-2}x)' = -2cos^{-3}x(cosx)' = \frac{2sinx}{cos^3 x}$$

Нерівність $f''(x) \geq 0$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується при $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$. Отже, функція є $y = tgx$ опуклою вниз на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Нерівність $f''(x) \leq 0$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується при $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$. Отже, функція є $y = tgx$ опуклою вниз на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$

На рисунку **1.** зображено графіки функцій та дотичні, проведені до них у точках з абсцисою x_0 . Ці функції на проміжках (a; x_0] і (x_0; b] мають різний характер опуклості.

Тому на цих проміжках графік функції розташований у різних півплощинах відносно дотичної. У цьому разі говорять, що точка x_0 є **точкою перегину** функції.

Рис.1

Наприклад, точка $x_0 = 0$ є точкою перегину функції $y = x^3$; точки виду $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ є точками перегину функції $y = cosx$.

Приклад 2.

Дослідіть характер опуклості і знайдіть точки перегину функції

$$f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12}$$

Розв'язання

Маємо:

$f'(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}$;

$$f''(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

Використовуючи метод інтервалів, дослідимо знак функції $y = f''(x)$

(рис. 2).

Маємо, що функція f опукла вгору на проміжку $(-\infty; 1]$ і опукла вниз на проміжку $[1; +\infty)$.

Функція f на проміжках $(-\infty; 1]$ і $[1; +\infty)$ має різний характер опуклості. У точці з абсцисою $x_0 = 1$ до графіка функції f можна провести дотичну. Отже, $x_0 = 1$ є точкою перегину функції f •

Рис.2

Коли в попередніх класах вам доводилося будувати графіки, ви, як правило, поступали так: позначали на координатній площині деяку кількість точок, які належать графіку, а потім з'єднували їх. Точність побудови залежала від кількості позначених точок.

На рисунку зображено кілька точок, які належать графіку деякої функції. Ці точки можна з'єднати по-різному, наприклад так, як показано на рисунках 2 і 3.

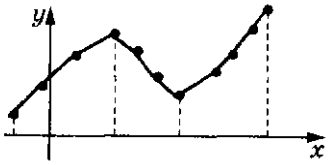


Рис. 3

Проте якщо знати, що функція f зростає на проміжках $[x_1; x_2]$ та $[x_3; x_4]$, спадає на проміжку $[x_1; x_2]$ і є диференційовною, то, скоріше за все, буде побудовано графік, показаний на рисунку 4.

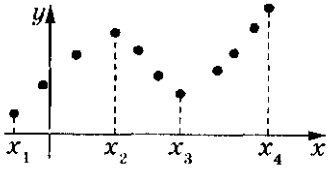


Рис. 4

Ви знаєте, які особливості притаманні графікам парної, непарної, періодичної функцій тощо. Узагалі, чим більше властивостей функції вдалося з'ясувати, тим точніше можна побудувати її графік. Дослідження властивостей функції будемо проводити за таким планом.

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність.
3. Знайти нулі функції.
4. Знайти проміжки знакосталості.
5. Знайти проміжки зростання і спадання.
6. Знайти точки екстремуму і значення функції в точках екстремуму.
7. Виявити інші особливості функції (періодичність функції, поведінку функції в околах окремих важливих точок тощо).

Зауважимо, що наведений план дослідження носить рекомендаційний характер та не є сталим і вичерпним. Важливо при дослідженні функції виявити такі її властивості, які дозволять коректно побудувати графік.

Приклад 1.

Дослідіть функцію $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3$ і побудуйте її графік.

Розв'язання. 1. Функція визначена на множині дійсних чисел, тобто

$$D(f) = R$$

2. $f(-x) = \frac{3}{2}(-x)^2 - \frac{1}{4}(-x)^3 = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3$. Звідси

$f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$. Таким чином, дана функція не є ні парною, ні непарною.

3-4. Маємо: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 = \frac{x^2}{4}(6 - x)$. Числа 0 та 6 є нулями функції f. Застосувавши метод інтервалів (рис. 5), знаходимо проміжки знакосталості функції f, а саме: установлюємо, що $f(x) > 0$ при
$x \in (-\infty; 0) \cup (0; 6)$ і $f(x) < 0$ при $x \in (6; +\infty)$.

5-6. Маємо: $f'(x) = 3x - \frac{3x^2}{4} = \frac{3x}{4}(4 - x)$. Дослідивши знак похідної,
доходимо висновку, що функція f зростає на проміжку $[0; 4]$, спадає на

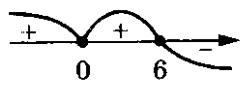


Рис.5

кожному з проміжків $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$, $x_{max} = 4$, $x_{min} = 0$.

Маємо: $f(4) = 8, f(0) = 0$.

7. Маємо: $f''(x) = 3 - \frac{3x}{2}$. Дослідивши знак другої похідної (рис. 7), доходимо висновку, що функція f є опуклою вниз на проміжку $(-\infty; 2]$, опуклою вгору на проміжку $[2; +\infty)$, $x = 2$ є точкою перегину і $f(2) = 4$. Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції

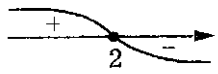
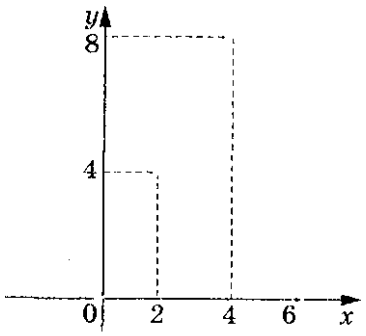


Рис. 7



Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення локального мінімуму.
2. Дайте означення локального максимуму.
3. Назвіть означення другої похідної функції.
4. Назвіть ознаку опуклості функції.
5. Дайте означення точки перегину.
6. Назвіть схему, за якою досліджують функцію за допомогою похідної.

Домашнє завдання: [1], с. 260

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема	Найбільше і найменше значення функції
Мета	ознайомити студентів з поняттям найбільшого та найменшого значень функції, правилом знаходження найбільшого та найменшого значень на відрізку, сформувати вміння знаходити найбільше та найменше значення функції на відрізку

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3] с. 277 [1] с. 253	10хв	Включає в себе: *узагальнення*, *теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали

Як добитися найменшої маси конструкції, не зашкодивши її міцності? Як, маючи обмежені ресурси, виконати виробниче завдання в найкоротший час? Як організувати доставку товару по торговельних точках так, щоб витрати палива були найменшими?

Такі й подібні задачі на пошук найкращого або, як говорять, оптимального розв'язку займають значне місце в практичній діяльності людини.

Уявімо, що відомо функцію, яка описує, наприклад, залежність маси

конструкції від її міцності. Тоді задача звелася до пошуку аргументу, при якому функція набуває найменшого значення.

У цьому пункті ми з'ясуємо, як можна знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку [a;b]. Обмежимося розглядом лише неперервних функцій.

Зауважимо, що точка, у якій функція набуває свого найменшого значення, не обов'язково є точкою мінімуму. Наприклад, на рисунку 13.1 min f(x)=f(a) (a), а точок мінімуму функція f не має. Також точка мінімуму не обов'язково є точкою, у якій функція набуває найменшого значення. На рисунку 2, *a* точка x_2 — єдина точка мінімуму, а найменше значення min f(x) досягається в точці *a.*

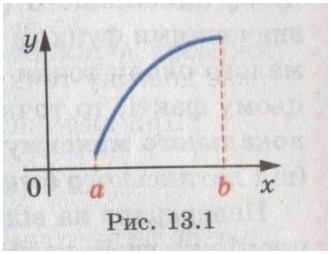


Рис. 13.1

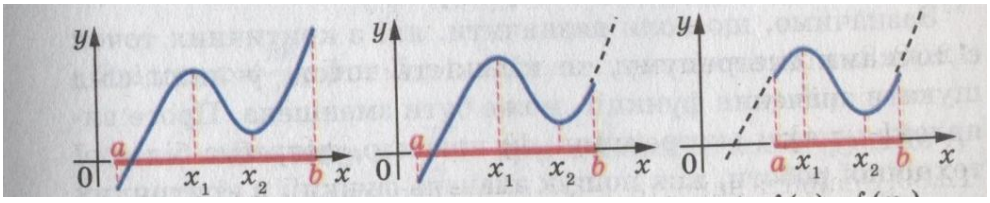


Рис.2

min *f* (x)=*f* (a) min *f* (x)=*f* (a) min *f* (x)=*f* (x_2)

max *f* (x)=f (b) max *f* (x)=*f* (x_1) max *f* (x)=*f* (x_1)

Аналогічне зауваження стосується і точок максимуму та точок, у яких функція набуває найбільшого значення.

На рисунку 2 подано різні випадки розташування точок екстремумів і точок, у яких функція набуває найбільшого та найменшого значень.

Тут важливо зрозуміти, що властивість функції мати точку екстремуму x_0 означає таке: функція набуває в точці x_0 найбільшого (найменшого) значення порівняно зі значеннями функції в усіх точках деякого, можливо, дуже малого околу точки x_0. Тому, якщо хочуть наголосити на цьому факті, то **точки екстремуму ще називають точками локального максимуму або точками локального мінімуму** (від латинського ***locus*** — місце).

Неперервна на відрізку [a; ***b***] функція набуває на цьому проміжку своїх найбільшого і найменшого значень або на кінцях відрізка, або в точках екстремуму (рис. 2).

Тоді для такої функції пошук найбільшого і найменшого значень на відрізку [a; Ь] можна проводити, користуючись такою схемою.

1. Знайти критичні точки функції ***f***, які належать відрізку [a; b]**.**
2. Обчислити значення функції в знайдених критичних точках і на кінцях розглядуваного відрізка.
3. З усіх знайдених значень обрати найбільше і найменше.

Зрозуміло, що цей алгоритм можна реалізувати лише тоді, коли розглядувана функція ***f*** має скінченну кількість критичних точок на відрізку [a; b].

Зазначимо, що коли визначити, які з критичних точок є точками екстремуму, то кількість точок, у яких слід шукати значення функції, може бути зменшена. Проте виявлення точок екстремуму, як правило, потребує більшої технічної роботи, ніж пошук значень функції в критичних точках.

Приклад **1.**

Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$$

на відрізку $[-2; 0]$.

Розв'язання.

Знайдемо критичні точки даної функції:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12$$

$$12x^2 - 18x - 12 = 0$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$x = 2$ або $x = -\frac{1}{2}$.

Отже, функція f має дві критичні точки, а проміжку $[-2; 0]$ належить одна: $x = -\frac{1}{2}$.

Маємо:

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $f(-2) = -38$, $f(0) = 6$.

Отже,

$$\max_{[-2;0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$$

$$\min_{[-2;0]} f(x) = f(-2) = -38$$

Відповідь: $\frac{37}{4}$, -38.

Приклад 2.

Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = 4sin2x - 2sin4x$$

на проміжку $[0; \pi]$.

Розв'язання.

Маємо:

$$f'(x) = 8cos2x - 8cos4x = 8(cos2x - cos4x) = 16sin3xsinx$$

Знайдемо критичні точки даної функції:

$$sin3xsinx = 0$$

$sin3x = 0$ або $sinx = 0$;

$x = \frac{\pi n}{3}$ або $x = \pi n$, n ∈ Z

Звідси $x = \frac{\pi n}{3}$, n ∈ Z

Отже, точки виду $x = \frac{\pi n}{3}$ є критичними точками функції f,

з них проміжку $[0; \pi]$ належать чотири точки: 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; π.

Обчислюємо:

$f(0) = f(\pi) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}$.

Таким чином,

$\max\limits_{[0;\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$, $\min\limits_{[0;\pi]} f(x) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}$.

Відповідь: $3\sqrt{3}, -3\sqrt{3}$.

Приклад 3.

Подайте число 8 у вигляді суми двох невід'ємних чисел так, щоб сума куба першого числа і квадрата другого була найменшою.

Розв'язання.

Нехай перше число дорівнює x, тоді друге дорівнює 8-x.З умови випливає, що $0 \le x \le 8$.

Розглянемо функцію $f(x) = x^3 + (8-x)^2$, визначену на відрізку[0;8], і знайдемо, при якому значенні x вона набуває найменшого значення.

Маємо: $f'(x) = 3x^2 - 2(8-x) = 3x^2 + 2x - 16$. Знайдемо критичні точки даної функції:

$$3x^2 + 2x - 16 = 0;$$

$$x = 2 \text{ або } x = -\frac{8}{3}$$

Серед заданих чисел проміжку [0;8] належить тільки число 2. Обчислюємо:

$$f(2) = 44, f(0) = 64, f(8) = 512.$$

Отже, функція f набуває найменшого значення при $x = 2$.

Відповідь: $8 = 2 + 6$.

Приклад 4.

Знайдіть сторони прямокутника, вписаного в коло радіуса R, якщо площа прямокутника набуває найбільшого значення.

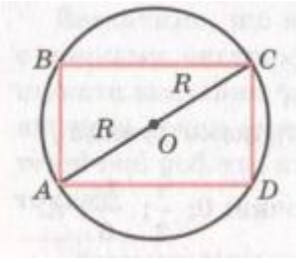


Рис.3

Розв'язання. Розглянемо прямокутник ABCD, вписаний у коло радіуса R (рис.3). Нехай AB = x, тоді

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4R^2 - x^2}.$$

Звідси площа прямокутника ABCD дорівнює $x\sqrt{4R^2 - x^2}$. З умови задачі випливає, що значення змінної x задовольняють нерівність $0 < x < 2R$.Таким чином, задача звелася до знаходження найбільшого значення функції

$S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ на інтервалі (0; 2R). Розглянемо неперервну функцію $f(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2},\ D(f) = [0; 2R]$, і будемо шукати її найбільше значення на відрізку [0; 2R].

Знайдемо критичні точки функції f:

$$f'(x) = (x)'\sqrt{4R^2 - x^2} + x\frac{1}{2\sqrt{4R^2 - x^2}}(4R^2 - x^2)' =$$

$$= \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{(4R^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

Функція f має одну критичну точку $x = R\sqrt{2}.$

Маємо: $f\left(R\sqrt{2}\right) = 2R^2,\ f(2R) = 0.$ Отже,

$$\max_{[0;2R]} \mathrm{f}(x) = f\left(R\sqrt{2}\right) = 2R^2.$$

Звідси отримуємо, що функція $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ на інтервалі (0; 2R) набуває найбільшого значення при $x = R\sqrt{2}$. Тоді $AB = R\sqrt{2}$,

$$BC = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}.$$

Отже, серед прямокутників, вписаних у коло радіуса R, найбільшу площу має квадрат зі стороною $R\sqrt{2}$.

Приклад 5.

Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x - 2} + \sqrt[4]{4 - x} = 2.$

Розв'язання.

Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[4]{x - 2} + \sqrt[4]{4 - x},$

$D(f) = [2; 4]$. Для всіх $x \in (2; 4)$ маємо:

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}}.$$

Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$. Запишемо:

$$\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}} = 0.$$

Звідси легко знайти, що $x = 3$. Отримали, що функція f на відрізку $[2; 4]$ має єдину критичну точку $x = 3$.

Оскільки функція f є неперервною на відрізку [2,4], то її найбільше і найменше значення знаходяться серед чисел $f(3), f(2), f(4)$. Маємо: $f(3) = 2, f(2) = f(4) = \sqrt[4]{2}$.

Отже, $\max\limits_{[2;4]} f(x) = f(3) = 2,$ причому найбільшого значення функція f набуває лише при $x = 3$.

Оскільки нам потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 2,$ то отримуємо, що $x = 3$ є його єдиним коренем.

Відповідь: 3.

Приклад 6.

Пункти *A*, *B* і *C* розміщені у вершинах прямокутного трикутника (∠*ACB*=90°), *BC* = 3 км, *AC* = 5 км. З пункту *A* до пункту *C* веде шосейна дорога. Турист починає рухатися з пункту *A* по шосе. На який відстані від пункту *A* турист має звернути із шосе, щоб за найменший час дійти з пункту *A* до пункту *B*, якщо швидкість туриста по шосе дорівнює 5 км /год, а поза шосе - 4 км /год?

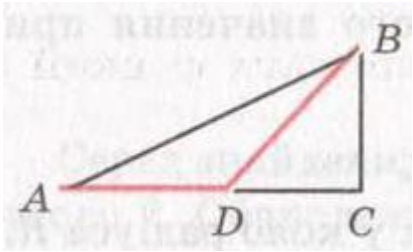


Рис. 4

Розв'язання. Позначимо через *D* точку, у якій турист має звернути із шосе, щоб найшвидше подолати шлях (рис. 4).

Нехай $AD = x$ км. Маємо: $DC = (5 - x)$км, $DB = \sqrt{DC^2 + DC^2} = \sqrt{(5-x)^2 + 9}$. Тоді час, за який турист подолає шлях, дорівнює $\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{(5-x)^2+9}}{4}$. Тепер зрозуміло, що для розв'язання задачі достатньо знайти найменше значення функції $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{(5-x)^2+9}}{4}$, заданої на відрізку [0; 5]. Маємо: $f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{5-x}{4\sqrt{(5-x)^2+9}}$.

Розв'язавши рівняння $\frac{1}{5} - \frac{5-x}{4\sqrt{(5-x)^2+9}} = 0$ (зробіть це самостійно), установлюємо, що число $x = 1$ є його єдиним коренем. Порівнюючи числа $f(0) = \frac{\sqrt{34}}{4}$, $f(1) = \frac{29}{20}$ і $f(5) = \frac{7}{4}$ установлюємо, що найменше значення функції на відрізку

Відповідь: 1 км

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення точки мінімуму.
2. Дайте означення точки максимуму.
3. Назвіть необхідну умову екстремуму.
4. Як знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку?
5. Дайте означення критичної точки.

Домашнє завдання: [1], с. 253, [3], с.277

Практичне заняття

з навчальної дисципліни ***Вища математика***

Тема Дії над комплексними числами у тригонометричній формі

Мета ознайомити студентів з тригонометричною формою комплексного числа, сформувати вміння виконувати дії над комплексними числами

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: *привітання*, *визначення присутності студентів на занятті*
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: *вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття*
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється *розбору та розв'язуванню прикладів*, *поточному контролю* (фронтальне опитування), *узагальненню висунутих положень*
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4] с. 66…67	10хв	Включає в себе: *узагальнення*, *теоретичні і фактичні висновки*, *закріплення вивченого матеріалу*

Література

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали

Нехай $r = |z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ - це модуль комплексного числа,

$\varphi = \arg(a+bi)$ - це одне значення аргументу комплексного числа. Із відношень

$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{|z|}$ $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{|z|}$, випливає, що $a = r\cos\varphi$ і $b = r\sin\varphi$, тоді

$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - називається *тригонометричною формою* комплексного числа.

Таким чином, будь-яке комплексне число $a + bi \neq 0$ можна записати в тригонометричній формі.

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$:

1.Добуток

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

2.Ділення

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

3.Для піднесення до n- го степеня використовується *ф о р м у л а М у а в р а*

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), n \in Z$$

4.Здобуття кореня n-го степеня з комплексного числа

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}) \quad , \text{де}$$

$\sqrt[n]{r}$ - арифметичний корінь, $k = 0,1,2,...., n-1$

Геометрично ці n значень виразу $\sqrt[n]{z}$ зображуються вершинами деякого правильного n- кутника, вписаного в коло з радіусом $\sqrt[n]{|z|}$ з центром у початку координат.

Приклади розв'язання типових задач

1.Записати у тригонометричній формі наступні комплексні числа:

а) $z = 2$.

Розв'язання: за умовою $a = 2$ і $b = 0$, тоді $r = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

$\varphi = arctg\frac{0}{2} = 0$ і за формулою $z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,отримаємо тригонометричну форму $z = 2 = 2(\cos 0 + i\sin 0)$.

б) $z = 6i$.

Розв'язання: за умовою $a = 0$ і $b = 6$,тоді $r = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$

$\varphi = arctg\frac{6}{0} = \frac{\pi}{2}$ і отримаємо $z = 6i = 6(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

в) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$.

Розв'язання: за умовою $a = -2$ і $b = 2\sqrt{3}$,тоді

$r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$ і головне значення аргументу

$\varphi = arctg\frac{2\sqrt{3}}{-2} = arctg(-\sqrt{3}) = \pi + arctg\sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$,отримаємо

$z = -2 + 2\sqrt{3}i = 4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$.

2.Записати в алгебраїчній формі:

а) $z = 2(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$

Розв'язання: так як $\cos 2\pi = 1$ і $\sin 2\pi = 0$,тоді отримаємо $z = 2(1 + i \cdot 0) = 2$.

б) $z = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

Розв'язання: так як $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ і

$\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$тоді отримаємо $z = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + i$.

3.Знайти добуток

$2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) \cdot 3(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}) = 2 \cdot 3(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12})) =$

$= 6(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 6(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$.

4. Виконати ділення

$10(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) : 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{10}{2}(\cos(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}))$

$= 5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 5(0 + i) = 5i$

5. Піднести до степеня : а) $(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^6$

Розв'язання: за формулою Муавра отримаємо

$(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^6 = \cos 6 \cdot \frac{\pi}{6} + i\sin 6 \cdot \frac{\pi}{6} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1$

б) $[\ \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ]^{10}$.

Розв'язання: спочатку запишемо це комплексне число в

тригонометричній формі : $a=\frac{3}{2}$ і $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $r=\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{3}$,

і $\varphi=arctg(-\frac{\sqrt{3}}{2}):(\frac{3}{2})=arctg(-\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{\pi}{6}$, тоді

$\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\,(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))$, таким чином

$$[\sqrt{3}(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))]^{10}=3^5[\cos(-10\cdot\frac{\pi}{6})+i\sin(-10\cdot\frac{\pi}{6})]=$$

$$=3^5(\cos\frac{5\pi}{3}-i\sin\frac{5\pi}{3})=3^5(\cos(\frac{5\pi}{3}-2\pi)-i\sin(\frac{5\pi}{3}-2\pi))=$$

$$=243(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=243(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=121{,}5(1+i\sqrt{3})$$

6. Обчислити корінь з комплексного числа $\sqrt[3]{i}$

Розв'язання:спочатку число $z=i$ запишемо в тригонометричній формі

$i=0+1\cdot i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$,тоді $z_k=\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=$

$$=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi\kappa}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi\kappa}{3}=\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi\kappa}{3})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi\kappa}{3}),\kappa=0,1,2$$

Якщо $\kappa=0$,то $z_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$

$\kappa=1$,то $z_1=\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$\kappa=2$,то $z_2=\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення тригонометричної форми комплексного числа.
2. Назвіть формулу Муавра.
3. Які дії можна виконувати над комплексними числами у тригонометричній формі?

Домашнє завдання: [4] с. 66…67